Finantza matematika

III: Kapitalizazio konposatua

Josemari Sarasola

Gizapedia

Kapitalizazio konposatua

Kontzeptua

Kapitalizazio sinplearen legeak formula honi jarraitzen diona da (interes konstantea suposatuz):

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

Lehen honen ezaugarri nagusia hau da: korrituak metatzen doaz hasierako kapitalera alditik aldira, korritu gehigarriak sortuz.

Kapitalizazio konposatua

Eratorpena

Korrituak metatzen doazenez:

$$
\begin{gathered}
C_1 = C_0 + C_0 i = C_0(1+i) \\
C_2 = C_1(1+i) = C_0(1+i)^2 \\
C_3 = C_2(1+i) = C_0(1+i)^3 \\
\cdots \\
C_n = C_{n-1}(1+i) = C_0(1+i)^n
\end{gathered}
$$

Kapitalizazio sinplea eta konposatua alderatuz

Adibidea

10€-ko kapital batetik abiaturik, eta urteko %20ko interes-tasarekin, aldera ditzagun bi kapitalizazio-metodoak:

- kapitalizazio sinplearekin,

Urtea	Hasieran	Interesak	Bukaeran
1	10	$10 \times 0.2 = 2$	12
2	11	$10 \times 0.2 = 2$	14
3	12	$10 \times 0.2 = 2$	16
4	13	$10 \times 0.2 = 2$	18

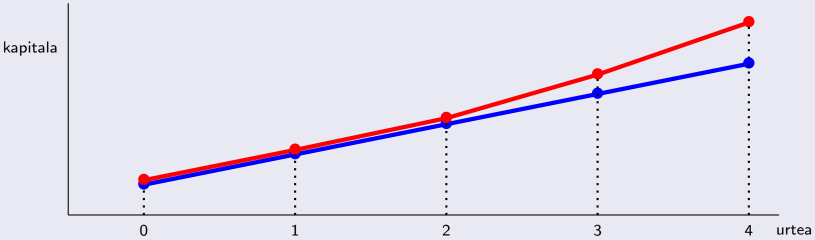
Adibidea (jarraipena)

- kapitalizazio konposatuarekin,

Urtea	Hasieran	Interesak	Bukaeran
1	10	$10 \times 0.2 = 2$	12
2	12	$12 \times 0.2 = 2.4$	14.4
3	14.4	$14.4 \times 0.2 = 2.88$	17.28
4	17.28	$17.28 \times 0.2 = 3.456$	20.736

Adibidea (jarraipena)

Bi kapitalizazio-metodoek sortzen dituzten kapitalen bilakaerak aldera ditzagun:



Kapitalizazio sinplea eta konposatua alderatuz

Konklusioa

- Kapitalizazio sinplean interesak beti hasierako kapitalari buruz kalkulatzen dira, eta beraz kapitalaren hazkundea lineala.
- Kapitalizazio konposatuan korrituak metatzen doaz hasierako kapitalera, eta horiek korritu gehigarriak sortzen dituzte. Kapitalaren hazkundea esponentziala da.

Oharra: Urtea baino epe laburragoetan ordea, denbora zatikatua denean alegia, kapitalizazio sinpleak korritu handiagoak ematen ditu. Hau da, $n < 1$ den kasuetan: $(1 + ni) > (1 + i)^n$.

Kapitalizazio konposatua

Interes aldakorra

$i_1\ i_2, \ldots,\ i_n$ aldi bakoitzeko interes-tasak izanik, bukaerako kapitala honela kalkulatzen da kapitalizazio konposatuaren arabera:

$$C_n = C_0(1+i_1)(1+i_2)\cdot\ldots\cdot(1+i_n)$$

Kapitalizazio konposatua

Kapitalizazio konposatua deskontu lege gisa: deskontu konposatuaren legea

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n} = C_n(1+i)^{-n}$$

Kapitalizazio konposatua

Interes tipoa

Hasierako eta bukaerako kapitala, eta epea ezagututa:

$$i = \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

Kapitalizazio konposatua

Epea

Hasierako kapitala eta tipoa ezagututa, bukaerako kapital jakin batera heltzeko behar den epea:

$$C_n = C_0(1+i)^n \to \ln C_n = \ln C_0 + n \ln(1+i) \to$$

$$\to n = \frac{\ln C_n - \ln C_0}{\ln(1+i)}$$

Kapitalizazio konposatua

Denbora zatikatua: hitzarmen lineala eta hitzarmen esponentziala

Denbora zatikatua dela esaten da kapitalizazio-aldi kopuru zenbaki osoa (1, 2, 3, ...) ez denean; adibidez, kapitala 2 urte eta 5 hilabetera inbertitzen denean. Nola kalkulatu korrituak osoa ez den hondar-aldi horretan (adibidean, 5 hilabete horietan)? Bi soluzio daude aukeran: *hitzarmen lineala* eta *hitzarmen esponentziala*.

Hitzarmen lineala

Hitzarmen lineala erabiltzen denean, aldi kopuru osoko korrituak kapitalizazio konposatuan kalkulatzen dira eta hondar-aldiko korrituak kapitalizazio sinplean. n aldi kopurua osoa eta m hondar-aldia izanik:

$$C_n = C_O(1+i)^n(1+mi)$$

Adibidez, 1000 € inbertiturik, 2 urte eta 5 hilabeterako kapitala, %4ko interesean, honela kalkulatuko litzateke bukaerako kapitala:

$$C_n = 1000 \times (1+0.04)^2(1+\frac{5}{12}\times 0.04) = 1099.62$$

Kapitalizazio konposatua

Hitzarmen esponentziala

Hitzarmen esponentziala erabiltzen denean, denbora guztian zehar erabiltzen da kapitalizazio konposatua:

$$C_n = C_O(1+i)^{n+m}$$

Adibidez, 1000 € inbertiturik, 2 urte eta 5 hilabeterako kapitala, %4ko interesean, honela kalkulatuko litzateke bukaerako kapitala:

$$C_n = 1000 \times (1+0.04)^{2+5/12} = 1099.42$$

Hitzarmen lineala eta esponentziala alderatuz

Diferentzia txikia izaten den arren, hitzarmen linealak beti korritu handiagoak ematen ditu. Arrazoia hau da: urtea baino epe laburragoetan, kapitalizazio sinpleak korritu handiagoak ematen ditu kapitalizazio konposatuak baino.