Bernoulli prozesuak eta loturiko banaketak

Josemari Sarasola

Gizapedia

Estatistika enpresara aplikatua

Bernoulli prozesuak

- Har ditzagun honako egoera hauek:
  - txanpon baten jaurtiketak hainbat alditan; adibidez, XXOOOXOXXOO;
  - akastunak eta akasgabeak dituen ontzi batetik itzulerazko erauzketak.
- Aurrekoak **Bernoulli prozesuak** dira, hainbat alditan zehar errepikatu, aldi bakoitzean soilik bi emaitza posible izan, eta aldi horietako emaitzak erabateko independentziaz gertatzen direlako.

Bernoulli banaketa

Bernoulli banaketak Bernoulli prozesu batean arrakasta (zerbait gertatzea) eta porrota (zerbait ez gertatzea) izateko probabilitateak adierazten ditu:

x	$p(x)$
0 (porrota) 1 (arrakasta)	1-p=q p
	1

Labur, honela idatziko da:

Bernoulli banaketa

$$X \sim \mathrm{b}(p)$$

Parametro bakarra du: p

Bernoulli banaketa

- Porrotak eta arrakastak ez dute zerikusirik zerbait txarra edo ona izatearekin, kontsideratzen den ezaugarriarekin baizik. Adibidez, sekuentzia binomial bateko akastun kopurua aztertzean, arrakasta akastuna da.
- Kalkula ditzagun $b(p)$ banaketaren itxaropena eta bariantza:

x	$p(x)$	$xp(x)$	$x^2p(x)$
0 (porrota) 1 (arrakasta)	1-p=q p	0 p	0 p
	1	p	$\alpha_2 = p$

$$X \sim b(p) \begin{cases} \mu = p \\ \sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq \end{cases}$$

Banaketa binomiala
Adibidea

- Ekoizpen-prozesu batean, pieza akastuna izateko probabilitatea 0.2 da. Piezak elkarrekiko independentziaz ekoizten dira. 8 pieza ekoizten da. Zenbat da horietatik 3 akastun suertatzeko probabilitatea?

$$P[8etatik\ 3X] = P[XXXOOOOO"eo"]$$

$$= 0.2 \times 0.2 \times 0.2 \times 0.8 \times 0.8 \times 0.8 \times 0.8 \times 0.8 \times \frac{8!}{3!5!}$$

$$= 0.2^3 \times 0.8^5 \times \frac{8!}{3!5!}$$

- XXXOOOOO sekuentziak X eta X eta X eta O eta ... adierazten du. *eta* bitartez loturiko gertaeren probabiltiateak horien probabilitateak bidertuz kalkulatzen da

Banaketa binomiala
Adibidea

$$0.2^3 \times 0.8^5 \times \frac{8!}{3!5!}$$

- Oro har, akastuna izateko probabilitatea p bada:

$$p^3 \times (1-p)^5 \times \frac{8!}{3!5!}$$

- Eta ekoiztutako pieza kopurua n bada:

$$p^3 \times (1-p)^{n-3} \times \frac{n!}{3!(n-3)!}$$

- Eta x akastun suertatzeko probabilitatea kalkulatu nahi bada:

$$p^x \times (1-p)^{n-x} \times \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Banaketa binomiala
Probabilitate-funtzioa

Banaketa binomialak n luzerako sekuentzia binomial batean x arrakasta izateko probabilitatea ematen digu (p izanik aldi bakoitzean arrakasta izateko probabilitatea):

Banaketa binomialaren probabilitate-funtzioa

$$P[X=x] = p^x \times (1-p)^{n-x} \times \frac{n!}{x!(n-x)!}; \quad x = 0,1,2,\ldots,n$$

Labur, honela idatziko da:

Banaketa binomiala

$$X \sim B(n,p)$$

2 parametro ditu: n eta p

Banaketa binomiala
Itxaropena eta bariantza

B(n,p) banakuntza n *b(p)* Bernoulli banakuntzen batura da:

$$B(n,p) = \overbrace{b(p) + b(p) + \ldots + b(p)}^{n}$$

- Azalpena (8 pieza, zenbat akastun)

$B(8,p)$	$b(p)$	$b(p)$	$b(p)$	$b(p)$	$b(p)$	$b(p)$	$b(p)$	$b(p)$
5 akastun	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1

(akastun:1, akasgabe:0) (gorriz, gauzatzen den gertakizuna)

Banaketa binomiala
Itxaropena eta bariantza

Batura baten itxaropena eta batura baten bariantza, hurrenik hurren, itxaropenen batura eta bariantzen batura direnez (azken hau independentzia dagoelako):

$$E[X_{B(n,p)}] = \overbrace{p + p + \ldots + p}^{n} = np$$

$$var[X_{B(n,p)}] = \overbrace{pq + pq + \ldots + pq}^{n} = npq$$

(Gogoratuz $b(p)$ baten itxaropena eta bariantza p eta pq direla, hurrenik hurren.)

Banaketa binomiala
R softwarea

R softwareko aginduen laburpena

$$X \sim B(10, 0.2)$$

- `dbinom(3,10,0.2) #P[X=3]`
- `pbinom(5,10,0.2) #P[X<=5]`
- `pbinom(4,10,0.2,lower.tail=FALSE] #P[X>4]`
- `1-pbinom(4,10,0.2) #P[X>4]`
- `x=0:10`
- `dbinom(x,10,0.2) #prob sinple guztiak`

Banaketa binomiala
Itzuli-aldia

Artisau batek 0.2ko probabilitateaz egin du zurezko pieza bat ongi. Zenbat pieza landu behar ditu guztira, bataz beste pieza on bat izateko?
Erantzuna 5 da. 5 piezako kopuru horri itzuli-aldia deritzo.

Itzuli-aldia (ia)

Itxaropena np=1 izateko behar den n (aldi edo elementu kopurua) da. Aurreko adibidean: $5 \times 0.2 = 1$ Beraz, $ia \times p = 1 \to p = \frac{1}{ia}$.

Itzuli-aldia (*return period, periodo de retorno*) bereziki istripu, hondamendi eta kalamidadeen testuinguruan erabiltzen da, horrelako gertaera zorigaiztoko bat noizko espero behar den zehazteko.

Banaketa geometrikoa

Banaketa binomialak *n* saialditan *x* arrakasta izateko probabilitatea ematen duen bezala, banaketa geometrikoak lehen arrakasta izan arte *x* porrot izateko probabilitatea ematen du.
Adibidez, lehen akastuna izan arte dagoen akasgabe kopurua zenbatzen bada, arrakasta da akastuna, X; porrota, akasgabea, 0:

Sekuentzia	Lehen akastuna izan arteko akasgabe kopurua
00X00XX...	x=2
X0X00X0...	x=0
000XX00...	x=3

Adibidez, $P[X=3] = P[000X] = (1-p)^3 p$

Probabilitate funtzioa

$$P[X=x] = (1-p)^x p; \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Banaketa geometrikoa

Labur, honela adierazten da:

Adierazpena eta parametroak

$$X \sim G(p)$$

Banaketa geometrikoaren itxaropena

$$E[X_{G(p)}] = q/p$$

Banaketa binomial negatiboa

Banaketa binomial negatiboak *r*-garren arraskata izan arte *x* porrot izateko probabilitatea ematen du. Adibidez,

r	Sekuentzia	r-garren akastuna izan arteko akasgabe kopurua
2	00X00XX...	x=4
1	X0X00XX...	x=0
3	XX000XX...	x=3

$$P[X=3]_{r=3} = P[XX000eo\ ETA\ Xfinko] = (1-p)^3p^2\frac{5!}{3!2!}p$$

Izan ere, honako sekuentzia hauetan guztietan $x=3$ betetzen da:

$$XX000|X\ /\ X0X00|X\ /\ 00XX0|X\ /\ \ldots$$

Banaketa binomial negatiboa

Probabilitate funtzioa

$$P[X=x] = (1-p)^x p^{r-1}\frac{[x+(r-1)]!}{x!(r-1)!}p; \quad x=0,1,2,\ldots$$

Azalpena: *r*-garren arrakastaren aurretik, *r-1* arrakasta eta *x* porrot gertatu behar dira, edozein ordenatan. Eta, azkenik, arraskata bat gertatu behar da.

Adierazpena eta parametroak

$$X \sim BN(r,p)$$

Banaketa binomial negatiboa

Erlazioa banaketa geometrikoarekin

$$BN(r=1,p) \equiv G(p)$$

Itxaropena

$$E[X_{BN(r,p)}] = r \times q/p$$

Logikoa, *BN(r,p)* banakuntza *r G(p)* banakuntzen batura baita. Hausnartu horri buruz.

R software: banaketa geometrikoa eta binomial negatiboa

Banaketa geometrikoa

$$X \sim G(p = 0.2)$$

- `dgeom(3,0.2) #P[X=3]`
- `pgeom(5,0.2) #P[X<=5]`
- `pgeom(4,10,0.2,lower.tail=FALSE] #P[X>4]`
- `1-pgeom(4,0.2) #P[X>4]`

Banaketa binomial negatiboa

$$Y \sim BN(r = 3, p = 0.2)$$

- `dnbinom(4,3,0.2) #P[X=4]`
- `pnbinom(5,0.2) #P[X<=5]`

Bernoulli prozesuak: laburpena

Bernoulli prozesuaren adibiodea:
OXOXX (arrakasta: X)

Bernoulli prozesuaren banaketak (p: arrak. prob., n: saiakuntza kopurua):

Izena	Notazioa	Aldagaia	Adibidea
Binomial	$B(n, p)$	n saiakuntzako arrakasta kop.	n=5,x=3
Geometric	$G(p)$	Lehen arrakasta aurreko porrot kop.	x=1
Negative binomial	$BN(r, p)$	r-gn arrakasta aurreko porrot kop.	r=2,x=2

Izena	Formula	Euskarria
$B(n, p)$	$P[X = x] = p^x(1-p)^{(n-x)} \dfrac{n!}{x!(n-x)!}$	$x = 0, 1, 2, .., n$
$G(p)$	$P[X = x] = (1-p)^x p$	$x = 0, 1, 2, ...$
$BN(r, p)$	$P[X = x] = (1-p)^x p^{r-1} \dfrac{[x+(r-1)]!}{x!(r-1)!} p$	$x = 0, 1, 2, ...$