ESTATISTIKA ENPRESARA APLIKATUA

2020ko azterketa ebatziak
(lehen zatia: Bernoulli prozesuetatik LTZra)

Donostiako Ekonomia eta Enpresa Fakultatea
Euskal Herriko Unibertsitatea

Egilea eta irakasgaiaren irakaslea:
Josemari Sarasola

Gizapedia

gizapedia.hirusta.io

ESTATISTIKA ENPRESARA APLIKATUA

Irakaslea: Josemari Sarasola

Data: 2020ko maiatzaren 21a, 16:50

BEREZIA: COVID-19

Kaixo. Ongi etorri Estatistika Enpresara Aplikatua irakasgaiko azterketara. Azterketa egin baino lehen irakur itzazu ohar hauek. Ezinbestekoak dira azterketa behar bezala egin eta baita azterketa eman den denboran zuk egin duzula ahal den neurrian ziurtatzeko. Beraz, arreta osoa jarri.
Azterketako problemetako datuak edo zenbakiak zure NAN zenbakian oinarritzen dira. NAN horretatik aterako dira problema ebazteko behar dituzun zenbakizko datuak.
Problema bakoitzaren deskribapenean, zenbakizko datuak ondoren azaltzen den notazio honen arabera osatuko dira. Zure NAN zenbakia hartu eta zifrak txikienetik handienera ordenatu. Hori egin baino lehen ordea, zeroak honela transformatu behar dituzu: zero bat badago zure NAN zenbakian 8 bihurtu, bi zero badaude lehenengoa 8 bihurtu eta bigarrena 2, eta hiru zero badaude, lehenengoa 8, bigarrena 2 eta hirugarrena 5 bihurtu. Zerorik ez badago, aurrera jarraitu. Esan bezala, zeroak (balira) aldatu ondoren, zifrak ordenatu behar dituzu txikienetik handienera. Adibidez, nire NAN zenbakia 44000123 balitz, azkenean 12234458 jarriko nuke. Azken segida honetako zifrak honela adieraziko dira: adibidez, 3garren zifra, #3 adieraziko nuke, 2 alegia; eta 7gn zifra #7, 5 alegia. Beraz, problema bat ebazteko 0.#3#7 probabilitatea erabili behar dela adierazten bada enuntziatuan, 0.25 hartu beharko zenuke NAN harekin.
Lau zero edo gehiago izan edota Espainiakoa ez den dokumentazioa izateagatik 8 zifra ez badituzu, emaila bidalidazu oraintxe, nik bueltan zenbaki bat esleitzeko.
Problema bakoitzaren ebazpenaren hasieran, argi eta garbi adierazi behar dituzu zure datuak nola eratu dituzun, NAN zenbakia jarriz, gero ordenatuz eta gero datuak nola atera dituen azalduz.
Azterketa onartu eta balioztatzeko, ezinbestekoa prozedurak horiek jarraitzea. Bestela, ebazpen baten sarreran datuen eraketa adierazten ez bada, datuak osatzean akatsa badago edo datu aldaketa bat egiten bada, ariketari 0 puntuazioa emango zaio.
Azterketa egin eta fitxategia egelan kargatzeko 2 ordu ta laurden dituzu. Beraz, 19:05ak arte. Azterketa eskuz idatzita egin behar duzu. Azterketa PDF formatoan bidali behar da, fitxategi bakar batea n, ondo eskaneatuta, ertz guztiak ondo ikusten direla, smartphonerako TapScanner edo CamScanner aplikazioen bitartez adibidez. Fitxategiaren izenak zure izen eta abizenak jaso behar ditu. Azterketa problemak azaltzen diren ordenan garatu behar da, orri zurietan, eta txukun. Zirriborro orriak gehitu behar dira azterketaren bukaeran, argi adierazita zirriborroak direla, eta zirriborrorik egin ez baduzu, hala adierazi behar didazu bukaeran. Zirriborroa azterketa zuk beste inork egin ez duela frogatzeko balio du. Zirriborroen zuzentasuna ez da ebaluatuko noski, okerrak, tatxoiak eta abar egon daitezke hor.
Azterketarekin batera, txat gela bat aktibatuko dut egelan. Txata arazo eta zalantza teknikoak adierazi eta konpontzeko erabiliko duzu. Baita ere nik mezu kolektiboak jakinarazteko (iraupenaren luzapena,).
Txatean etzazu planteatu inongo adierazpenik edo zalantzarik azterketako problemei buruz. Azterketako problemei buruz duda sortzen bazaizu, bidali email bat, baino soilik zalantza pertinentea den kasuetan erantzungo dut.

Hasteko, orri bat hartu eta zinpeko deklarazio hau eskuz idatzi eta sinatu, zure izen eta abizenak txertatzearekin batera. Zure azterketaren lehenengo orria izango da:

Nik, (izena eta abizenak, NAN), zin egiten dut azterketa hau inorekin harremanekin jarri gabe burutu, eta kalkulagailua eta kalkuluak egiteko beste tresna batzuk salbu, interakziorik gabeko ikasketa material finkoa beste deus ez dudala erabili. (Zure bizilekua), 2020ko maiatzaren 21ean (Zure sinadura)

Eta orain, zure NAN zenbakiaren azken zifra bakoitia bada, ebatzi itzazu 1, 2, 3, 4, eta 5 problemak.
Zure NAN zenbakiaren azken zifra bikoitia bada, ebatzi itzazu 6, 7, 8, 9 eta 10 problemak.
Ez dagozkizun problemak ebazten badituzu, 0 izango duzu azterketan.

ESTATISTIKA ENPRESARA APLIKATUA. Irakaslea:Josemari Sarasola. 2020KO MAIATZAK 21.

I. EBAZKIZUNA *(2 puntu)*

Pieza akastun bat ekoizteko probabilitatea 0.#4#5 da normaltasunean. Informazio berriaren arabera, #1#2 piezatik #1 suertatu da akastun. 0.0#3ko (0 koma 0 #3) adierazgarritasun mailaz, har ezazu erabaki bat p-balioa kalkulatuz.

II. EBAZKIZUNA *(2 puntu)*

Web batera bezeroak #4 minutuko batez besteko denbora tarte batez sartzen dira, erabat zoriz eta independentziaz.

1. Zenbat da #1#2 minututan #2 bezero edo gehiago sartzeko probabilitatea?
2. Zenbat da bezero batetik bestera #8 minutu baino gehiago izateko probabilitatea?
3. Zenbat da #4 bezero etorri bitartean 10 minutu (finkoa) baino gehiago izateko probabilitatea?

Oharra: Ez da beharrezkoa azken emaitza zehatza kalkulatzea. Adierazpena besterik ez duzu eman behar.

III. EBAZKIZUNA *(2 puntu)*

Populazio batean #1#1 gizon eta #1#2 emakume daude. #8 pertsona gaixotu dira COVID-19arekin, #2 emakumeak eta besteak gizonak. %1eko adierazgarritasun mailaz (finkoa), erabaki emakumeak gutxiago gaixotzen diren.

IV. EBAZKIZUNA *(2 puntu)*

Eguneko ordenagailu salmentak web batean banaketa uniforme diskretuari buruzkoak dira, #1 - #8 tartean.

1. Zenbat #8 egunetatik #2tan #3 edo gutxiago saltzeko probabilitatea?
2. Zenbat da #8 egunetatik, salmenta minimoa #3 izateko probabilitatea?
3. Zenbat da #8 egunetatik, salmenta maximoa #6 izateko probabilitatea?

Oharra: Ez da beharrezkoa azken emaitza zehatza kalkulatzea. Adierazpena besterik ez duzu eman behar.

V. EBAZKIZUNA *(2 puntu)*

Gel hidroalkoholiko kontsumoa lantegi batean eguneko batezbeste #8 litro da, #1eko desbideratzearekin. Banaketa zehatza ezezaguna da. Zenbat gel erosi behar da #4#5 egunetarako egun horietan gel nahikoa izateko probabilitatea 0.#8#7 izan dadin gutxienez?

VI. EBAZKIZUNA *(2 puntu)*

Ikasle batzuen kalifikazioak jasotzen dira ondoren: #1#2–#2#1–#1#3–#4#2–#1#4–#7#8–#1#1–#2#2–#6#8–#2#3–#3#3 Probatu mediana #4#4 baino txikiagoa delako hipotesia, zeinuen probaren bitartez, balio kritikoa bilatuz tauletan nahiz p-balioa kalkulatuz. Adierazgarritasun maila: %10 (finkoa).

VII. EBAZKIZUNA *(2 puntu)*

Akastuna izateko probabilitatea 0.#2#3 da.

1. Adierazi (ez da azken emaitza kalkulatu behar) #9 pieza ekoitzi behar izateko probabilitatea lehen akasgabea izan arte.
2. Adierazi (ez da azken emaitza kalkulatu behar) #9 pieza ekoitzi behar izateko probabilitatea #4garren akastuna izan arte.
3. Kalkulatu batezbeste zenbat pieza ekoitzi behar diren #4garren akastuna izan arte.

VIII. EBAZKIZUNA *(2 puntu)*

Makina batean orduro gertatzen den geldialdi kopurua #2.#5 (#2 koma #5) da batezbeste normalean, erabat zoriz eta independentziaz. 2 ordutan zehar, #4 geldialdi izan da. Zein da hartu behar duzun erabakia? Adierazgarritasun-maila: 0.0#2 (0 koma 0 #2).

IX. EBAZKIZUNA *(2 puntu)*

Eguneko ekoizpena lantegi batean banaketa uniforme jarraituaren arabera banatzen da era honetan: U(#1#2, #7#8).
(1) Kalkulatu maximoaren itxaropena #6 egunetan zehar.
(2) Kalkulatu maximoaren itxaropena #5#6 izateko behar den egun kopurua.

X. EBAZKIZUNA *(2 puntu)*

(De Moivre-Laplace) Herri batean #1#2#3 pertsona bizi dira. COVID-19rako testa guztiei egin behar zaie, eta positibo ematen dutenak toki itxi batean konfinatu behar dira. Positibo emateko probabilitatea 0.#1#2 (0 koma #1 #2) da. Zenbat ohe prestatu behar dira guztientzat ohe nahikoa izateko probabilitatea 0.#7#8 izan dadin?

ESTATISTIKA ENPRESARA APLIKATUA.
Irakaslea:Josemari Sarasola.
2020KO MAIATZAK 21. 16:50.

I. EBAZKIZUNA *(2 puntu)*

Pieza akastun bat ekoizteko probabilitatea 0.#4#5 da normaltasunean. Informazio berriaren arabera, #1#2 piezatik #1 suertatu da akastun. 0.0#3ko (0 koma 0 #3) adierazgarritasun mailaz, har ezazu erabaki bat p-balioa kalkulatuz.

Ordenatu nire NANa: 87654321 $\rightarrow$ 12345678

Datu orokorrak nire datuetara aldatu:

#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8
1	2	3	4	5	6	7	8

$p(akastun) = 0.45$ eta 12 piezatik 1 akastun. $\alpha = 0.03$

Hipotesi nulua? 3. irizpidea: datuek erakusten dutenaren aurkakoa: 1/12 ohiko 0.45eko ohiko proportzioa baino txikiagoa da. Badirudi akastunak gutxitu direla, eta beraz aurkakoa hartzen dut hipotesi nulu moduan:

$H_0 : p \geq 0.45$

Hipotesi nulua (akastun probabilitate handia) baztertzen da, akastun gutxi daudenean. Beraz, eremu kritikoa azpitik dago:

$$P[ebidentzia/H_0] = P[X \leq 1/p = 0.45] = 0.45^1 \cdot 0.55^{11} \cdot \frac{12!}{11!1!} + 0.55^{12} = 0.008 < \alpha$$

Hipotesi nulua baztertu behar da: akastunak gutxitu direla erabaki behar da.

II. EBAZKIZUNA *(2 puntu)*

Web batera bezeroak #4 minutuko batez besteko denbora tarte batez sartzen dira, erabat zoriz eta independentziaz.

1. **Zenbat da #1#2 minututan #2 bezero edo gehiago sartzeko probabilitatea?**
2. **Zenbat da bezero batetik bestera #8 minutu baino gehiago izateko probabilitatea?**
3. **Zenbat da #4 bezero etorri bitartean 10 minutu (finkoa) baino gehiago izateko probabilitatea?**

Oharra: Ez da beharrezkoa azken emaitza zehatza kalkulatzea. Adierazpena besterik ez duzu eman behar.

Poisson prozesu batean gaude eta denboraren batezbestekoa ematen digute:

$$\frac{1}{\lambda} = 4min \rightarrow \lambda = \frac{1}{4} = 0.25\ minutuko$$

$\boxed{(2)}$

12 minutuko lambda parametroa $12 times 0.25 = 3$ da.

$P[X \geq 2] = 1 - P[X \leq 1] = 1 - \dfrac{e^{-3}3^0}{0!} - \dfrac{e^{-3}3^1}{1!} = 0.8$

$\boxed{(2)}$

Denbora esponentzialki banatzen da:

$P[D > 8] = 1 - P[D < 8] = 1 - (1 - e^{-8\times 0.25}) = e^{-2}$

$\boxed{(3)}$

4. bezeroa etorri bitarteko denbora $\Gamma(\lambda = 0.25, k = 4)$ banatzen da. Probabilitatea kalkulatzeko, honela pentsatuko dugu:

4. bezeroa etorri bitartean 10 minutu baino gehiago izango dira, 10 minututan 4 bezero baino gutxiago datozenean. 10 minutuko lambda parametroa 2.5 dela kontuan harturik:

$$P[D > 10] = P[X < 4] = P[X \leq 3] = \frac{e^{-2.5}2.5^0}{0!} + \frac{e^{-2.5}2.5^1}{1!}\frac{e^{-2.5}2.5^2}{2!}\frac{e^{-2.5}2.5^3}{3!} = 0.75$$

III. EBAZKIZUNA *(2 puntu)*

Populazio batean #1#1 gizon eta #1#2 emakume daude. #8 pertsona kutsatu dira COVID-19arekin, #2 emakumeak eta besteak gizonak. %1eko adierazgarritasun mailaz (finkoa), erabaki emakumeak gutxiago kutsatzen diren.

Sexua/Covid	Kutsatua	Kutsatu gabea	Totala
Gizona	6	5	11
Emakumea	2	10	12
Totala	8	15	23

Hipotesi nuluan, sexua eta kutsatzea independenteak dira. Aukeran, alternatiboki, emakumeak gutxiago gaixotzen dira. Beraz, alde bakarreko proba da (p balioa alfarekin alderatu behar da).

Kalkulua laburragoa izateko emakume kutsatuen kopurua hartuko dugu pibote moduan:

Sexua/Covid	Kutsatua	Kutsatu gabea	Totala
Emakumea	2	10	12
Gizona	6	5	11
Totala	8	15	23

Independentzia balitz, emakume kutsatuen kopurua $\frac{8 \times 12}{23} = 4.17$ da. Beraz, izan dena espero dena baino gutxiago da, eta beraz "arraroa"azpitik dago:

$$P[X \leq 2] = \frac{\binom{8}{2}\binom{15}{10}}{\binom{23}{12}} + \frac{\binom{8}{1}\binom{15}{11}}{\binom{23}{12}} + \frac{\binom{8}{0}\binom{15}{12}}{\binom{23}{12}} = 0.0621$$

p balioa adierazgarritasun-maila baino handiagoa da. Beraz, ez dago ebidentzia nahikorik baieztatzeko emakumeak gutxiago kutsatzen direla.

IV. EBAZKIZUNA *(2 puntu)*

Eguneko ordenagailu salmentak web batean banaketa uniforme diskretuari buruzkoak dira, #1 - #8 tartean.

1. Zenbat #8 egunetatik #2tan #3 edo gutxiago saltzeko probabilitatea?
2. Zenbat da #8 egunetatik, salmenta minimoa #3 izateko probabilitatea?
3. Zenbat da #8 egunetatik, salmenta maximoa #6 izateko probabilitatea?

Oharra: Ez da beharrezkoa azken emaitza zehatza kalkulatzea. Adierazpena besterik ez duzu eman behar.

Salmentak 1-8 artean banatzen dira.

$\boxed{(1)}$

$n = 8\ egun$; $N = 8$ (salmenta maximo absolutua)

Egun batean 3 edo gutxiago saltzeko probabilitatea 3/8 da.

8 egunetatik 2tan 3 edo gutxiago saltzeko probabilitatea hau izango da, banaketa binomialaren probabilitate-funtzioa baliatuz:

$$P[X = 2] = \left(\frac{3}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^6 \cdot \frac{8!}{2!6!}$$

$\boxed{(2)}$

$i = 3$ (3 hirugarren balio posiblea da)

$$P[min = 3] = \left(\frac{8-(3-1)}{8}\right)^8 - \left(\frac{8-3}{8}\right)^8$$

$\boxed{(3)}$

$i = 6$ (6 seigarren balio posiblea da)

$$P[MAX = 6] = \left(\frac{6}{8}\right)^8 - \left(\frac{6-1}{8}\right)^8$$

V. EBAZKIZUNA *(2 puntu)*

Gel hidroalkoholiko kontsumoa lantegi batean eguneko batezbeste #8 litro da, #1eko desbideratzearekin. Banaketa zehatza ezezaguna da. Zenbat gel erosi behar da #4#5 egunetarako egun horietan gel nahikoa izateko probabilitatea 0.#8#7 izan dadin gutxienez?

---

45 egunetako kontsumoa honela banatzen da LTZ aplikatuz:

$$\mathbf{X} \sim N(\mu = 45 \times 8 = 360; \sigma = \sqrt{45 \times 1^2} = 6.7)$$

k kopuru bat erosita, nahikoa izango da X kontsumoa k baino txikiagoa denean:

$$P[X < k] = P\left[Z < \frac{k - 360}{6.7}\right] = 0.87 \rightarrow \frac{k - 360}{6.7} = 1.12 \rightarrow k = 367.50 \; litro$$

VI. EBAZKIZUNA *(2 puntu)*

Ikasle batzuen kalifikazioak jasotzen dira ondoren: #1#2–#2#1–#1#3–#4#2–#1#4–#7#8–#1#1–#2#2–#6#8–#2#3–#3#3 Probatu mediana #4#4 baino txikiagoa delako hipotesia, zeinuen probaren bitartez, balio kritikoa bilatuz tauletan nahiz p-balioa kalkulatuz. Adierazgarritasun maila: %10 (finkoa).

Zeinuak: ——+–+–

$r^+ = 2; r^- = 9$

$H_0 : Me < 44$

p-balioa emanaz

Hipotesi nulua baztertzen da r^- oso txikia denean; beraz, eremu kritikoa azpitik dago:

$$P[r^- \leq 9] = 1 - P[r^- \geq 10] = 1 - 0.5^{10} \cdot 0.5^1 \cdot \frac{11!}{10!1!} - 0.5^{12} = 0.99$$

p balioa alfa (%10) baino handiagoa da. Beraz, hipotesi nulua onartu behar da.

balio kritikoaz

r^- balioari erreparatu behar zaio, baztertzeko bere balioa txikia (eta beraz minimoa) izan behar delako. Tauletan begiratzeko, bider 2 egiten da alfa. Balio kritikoa: 2.

Estatistikoa (9, balio erreala) gainetik dagoenez, hipotesi nulua onartu egiten da.

VII. EBAZKIZUNA *(2 puntu)*

Akastuna izateko probabilitatea 0.#2#3 da.

1. **Adierazi (ez da azken emaitza kalkulatu behar) #9 pieza ekoitzi behar izateko probabilitatea lehen akasgabea izan arte.**
2. **Adierazi (ez da azken emaitza kalkulatu behar) #9 pieza ekoitzi behar izateko probabilitatea #4garren akastuna izan arte.**
3. **Kalkulatu batezbeste zenbat pieza ekoitzi behar diren #4garren akastuna izan arte.**

---

(1)

9 pieza ekoitzi behar izatea esan nahi du X=8 pieza akastun behar ditugula lehen akasgabea izan arte. Banaketa geometrikoa erabiltzen dugu:

$$P[X = 8] = 0.23^8 \cdot 0.77$$

(2)

9 pieza ekoizteko 4. akastuna izan arte, 8 piezetan 3 akastun eta X=5 akasgabe izan behar dira, eta 9gna akastuna izan behar da:

$$P[X = 5] = 0.77^5 \cdot 0.23^3 \cdot \frac{8!}{5!3!} \cdot 0.23$$

(3)

4gn akastuna izan arte ekoitzi beharreko pieza kopurua 4 akastunak gehi tarteko akasgabe kopurua da. Akasgabe kopuru hori BN(r=4,p=0.23) banatzen da eta itxaropena $rq/p = 4 \times 0.77/0.23 = 13.40$ da. Beraz, batezbeste ekoitzi beharreko pieza kopurua 13.40+4=17.40 izango da.

VIII. EBAZKIZUNA *(2 puntu)*

Makina batean orduro gertatzen den geldialdi kopurua #2.#5 (#2 koma #5) da batezbeste normalean, erabat zoriz eta independentziaz. 2 ordutan zehar, #4 geldialdi izan da. Zein da hartu behar duzun erabakia? Adierazgarritasun-maila: 0.0#2 (0 koma 0 #2).

Poisson prozesu batean gaude. 2 orduko lambda parametroa $2.5 \times 2 = 5$ da. Ebidentziak erakusten du itxuraz geldialdi gutxiago daudela, 4 hain zuzen. Beraz, hipotesi nulu moduan aurkakoa hartzen dugu: $H_0 : \lambda \geq 5$. Hipotesi nulua baztertzen da geldialdi gutxi daudenean, beraz eremu kritikoa azpitik dago. Eman dezagun p-balioa:

$$P[X \leq 4/\lambda = 5] = \frac{e^{-5}5^0}{0!} + \frac{e^{-5}5^1}{1!} + \frac{e^{-5}5^2}{2!} + \frac{e^{-5}5^3}{3!} + \frac{e^{-5}5^4}{4!} = 0.44 > 0.02 \rightarrow H_0 \ onartu$$

Hartara, geldialdi kopurua jaitsi dela baieztaxtu ahal izateko arrazoi nahikorik dagoela ondorioztatu behar da.

IX. EBAZKIZUNA *(2 puntu)*

Eguneko ekoizpena lantegi batean banaketa uniforme jarraituaren arabera banatzen da era honetan: U(#1#2, #7#8).
(1) Kalkulatu maximoaren itxaropena #6 egunetan zehar.
(2) Kalkulatu maximoaren itxaropena #5#6 izateko behar den egun kopurua.

$X \sim U(12, 78)$

$\boxed{(1)}$

$$E[Max] = 12 + \frac{6 \times (78 - 12)}{6 + 1} = 68.5$$

$\boxed{(2)}$

$$E[Max] = 12 + \frac{n \times (78 - 12)}{n + 1} = 56 \rightarrow n = 2$$

n zenbaki osoa ez balitz, borobildu egin beharko litzateke zenbaki oso batera. Eskatutako maximoa gutxienekoa dela suposatzen da, emaitza hurrengo zenbaki osora borobildu behar da.

X. EBAZKIZUNA *(2 puntu)*

(De Moivre-Laplace) Herri batean 123 pertsona bizi dira. COVID-19rako testa guztiei egin behar zaie, eta positibo ematen dutenak toki itxi batean konfinatu behar dira. Positibo emateko probabilitatea 0.#1#2 (0 koma #1 #2) da. Zenbat ohe prestatu behar dira guztientzat ohe nahikoa izateko probabilitatea 0.#7#8 izan dadin?

Positibo kopurua honela banatu eta hurbiltzen da normalaren bitartez ($n > 30$):

$$X \sim B(n = 123, p = 0.12) \rightarrow N(\mu = np = 123 \times 0.12 = 14.76, \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{123 \times 0.12 \times 0.88} = 3.60)$$

k ohe prestatzen badira, nahikoa izango dira positiboak k edo gutxiago direnean (jarraitutasun-zuzenketa ez dut egiten):

$$P[X \leq k] = P\left[Z < \frac{k - 14.76}{3.60}\right] = 0.78 \rightarrow \frac{k - 14.76}{3.60} = 0.77 \rightarrow k = 17.53 \rightarrow (zuhurtasunez)\ k = 18\ ohe$$