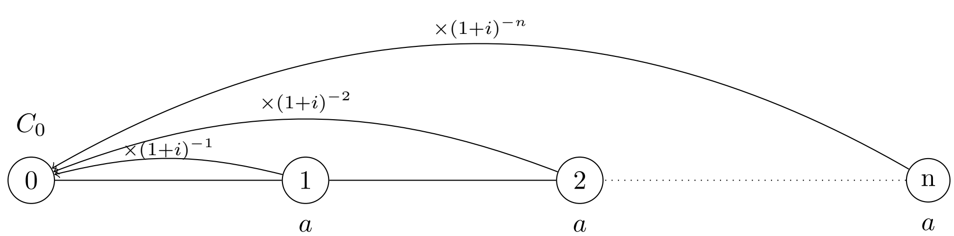
Mailegu frantsesa

Josemari Sarasola

2016ko abendua

1 Kontzeptua eta kuotaren kalkulua

Mailegu frantsesa mailegua amortizatu eta interesak ordaintzeko epemugara arte kuota konstanteak eta ondoren ordaintzekoak dituen mailegua da, interestasa finko batez. Maileguaren zenbatekoa C_0, aldi kopurua n eta kuota a izendatzen badira, honako litzateke maileguaren baliokidetasun-eskema, non goian hartzaileak jaso (C_0) eta behean eman behar dituenak (a kuotak, ondoren ordaintzekoak) agertzen diren:



Horrela, kapitalen arteko baliokidetasun-erlazioa honela ezarriko genuke, i aldiko interes baterako:

$$C_0 = a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + \cdots + a(1+i)^{-n} = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = a \times a_{\overline{n}|i}$$

Eta hortik:

$$a = \frac{C_0}{a_{\overline{n}|\, i}}$$

Adibidea: 10.000 €-ko mailegu jaso da 10 urtera, urteko %4-ko interes-tasa finkoarekin.

1. Zenbat da urtero ordaindu beharreko kuota?
2. Kuotak hilerokoak badira, zenbat ordaindu behar da?

1. $$a = \frac{10.000}{\frac{1-(1+0.04)^{-4}}{0.04}} = 1232.91€$$

2. Lehenbizi, hileko interes baliokidea kalkulatu behar da:

$$i_{12} = (1+0.04)^{1/12} - 1 = 0.00327$$

Eta interes horrekin kalkuluak eginez, kontuan hartuz aldi kopurua orain $12 \times 10 = 120$ hilabete dela:

$$a = \frac{10.000}{\frac{1-(1+0.00327)^{-120}}{0.00327}} = 100.88€$$

Ohartu behar da, urtean hilabeteko kuotekin urteko kuotekin baino gutxiago ordaintzen dela ($100.88 \times 12 < 1232.91$). Izan ere, hilabeteka ordaintzean, urtean zehar kapitala amortizatzen joaten gara, eta horrela interes gutxiago ordaindu behar dira.

2 Amortizazio-taula

Amortizazio-taulan maileguaren bilakaerari buruzko honako aldagai hauek zehazten dira, k epemuga bakoitzean, ordena honetan eta zutabe banatan: k kuota ordaintzen direneko epemugak ($k = 1, 2, \ldots, n$), a kuotak (konstanteak mailegu frantsesean), kuota horiek interesen ordainketarako (I_k, interes-kuotak) eta maileguaren amortizaziorako (A_k, amortizazio-kuotak) nola bereizten diren, amortizazio metatua (m_k) eta amortizatzeke geratzen den kapitala edo kapital bizia (C_k). Errenkada bakoitzak epemuga horretako aldagaiek hartzen duten balioa adierazten du.

Aldagai hauek guztiak zehazteko pausoak honako hauek dira (ikusi ondorengo taulan, goi-indize batez adierazita, taulako zein gelaskatan gauden pauso bakoitzean):

1. kuotak berdinak dira aldi guztietan, beraz hori kalkulatu ondoren, zutabe osoa bete dezakegu a balioarekin;

2. $k = 1$ epemugan, kuotatik interesak ordaintzeko erabiltzen den zatia honela kalkulatzen da:
$$I_1 = C_0 \times i$$

3. mailegua amortizatzeko kuota, berriz, kuota osoa ken interes-kuota izango da:
$$A_1 = a - I_1$$

4. amortizazio metatua lehen aldi horretan, $m_1 = A_1$ izango da, lehen kuotan gaudenez, aurretik ezer amortizatu ez delako;

5. kapital bizia, azkenik, maileguaren zenbatekoa ken amortizazio metatua izango da:
$$C_1 = C_0 - m_1$$

6. $k = 2$ epemugara aldatuz, bigarren errenkadan alegia, interesen zatia honela kalkulatzen da:

$$I_2 = C_1 \times i$$

7. amortizazio-kuota, berriz, honela kalkulatzen da:

$$A_2 = a - I_2$$

8. amortizazio metatua lehen aldi horretan, $m_2 = m_1 + A_2$ izango da, aurreko amortizazio metatua gehi kuota honetako amortizazioa alegia,

9. kapital bizia, azkenik, honela kalkulatzen da:

$$C_2 = C_0 - m_2$$

10. aurreko eragiketak errenkadaz errenkada errepikatzen dira, $k = n$ epemugara heldu arte, non amortizazio metatua C_0 eta kapital bizia 0 izango den.

Taula osoa honela geratzen da, azkenik (goi-indize moduan, aurreko zein pausotan egin dugun agertzen da):

Epemuga k	Kuota a_k	Interes-kuota I_k	Amortizazio-kuota A_k	Amort. metatua m_k	Kapital bizia C_k
0	-	-	-	-	C_0
1	$a^{(1)}$	$I_1 = C_0 \times i^{(2)}$	$A_1 = a - I_1^{(3)}$	$m_1 = A_1^{(4)}$	$C_1 = C_0 - m_1^{(5)}$
2	a	$I_2 = C_1 \times i^{(6)}$	$A_2 = a - I_2^{(7)}$	$m_2 = m_1 + A_2^{(8)}$	$C_2 = C_0 - m_2^{(9)}$
...	...	...	...	...	...
k	a	$I_k = C_{k-1} \times i$	$A_k = a - I_k$	$m_k = m_{k-1} + A_k$	$C_k = C_0 - m_k$
...	...	...	...	...	...
1	a	$I_n = C_{n-1} \times i$	$A_n = a - I_n$	$C_0^{(10)}$	0

Adibidea: 10.000 €-ko mailegu jaso da 6 urtera, urteko %4-ko interes-tasa finkoarekin, eta urteko kuotekin. Eratu maileguaren amortizazio-taula.

Lehenbizi, ordaindu beharreko kuota kalkulatu behar da:

$$a = \frac{10.000}{\frac{1-(1+0.04)^{-6}}{0.04}} = 1907.62€$$

Epemuga	Kuota	Interes-kuota	Amortizazio-kuota	Amort. metatua	Kapital bizia
0	-	-	-	-	10000,00
1	1907,62	400,00	1507,62	1507,62	8492,38
2	1907,62	339,70	1567,92	3075,54	6924,46
3	1907,62	276,98	1630,64	4706,19	5293,81
4	1907,62	211,75	1695,87	6402,05	3597,95
5	1907,62	143,92	1763,70	8165,76	1834,24
6	1907,62	73,37	1834,25	10000,00	0,00

3 Formula zuzenak

Aljebra sinplea erabiliz, maileguaren aldagaietarako formula zuzenak erator daitezke, edozein epemugetarako.

3.1 Amortizazio-kuota

Dakigunez, k eta $k+1$ epemugetarako honako hauek betetzen dira:

$$\begin{aligned} a = I_k + A_k &= C_{k-1}i + A_k \\ a = I_{k+1} + A_{k+1} &= C_k i + A_{k+1} \end{aligned}$$

Bi ekuazioen kenketa eginez:

$$a - a = (C_{k-1} - C_k)i + (A_k - A_{k+1})$$

Gainera: $C_{k-1} - C_k = A_k$.

Beraz, kenketara itzulita: $0 = A_k i + (A_k - A_{k+1}) \rightarrow A_{k+1} = A_k(1+i)$

Eta orduan, atzeraka eginez eta aldi bakoitzean formula k, $k-1$, ..., $k=2$ epemugetara aplikatuz:

$$A_{k+1} = A_k(1+i) = A_{k-1}(1+i)^2 = \cdots = A_1(1+i)^k$$

3.2 Amortizazio metatua

k epemugako amortizazio metatua bi ikuspuntu hauetatik kalkula daiteke, k epemuga batean:

- maileguaren zenbateko osoari epemuga horretako kapital bizia kenduz:

$$m_k = C_0 - C_k$$

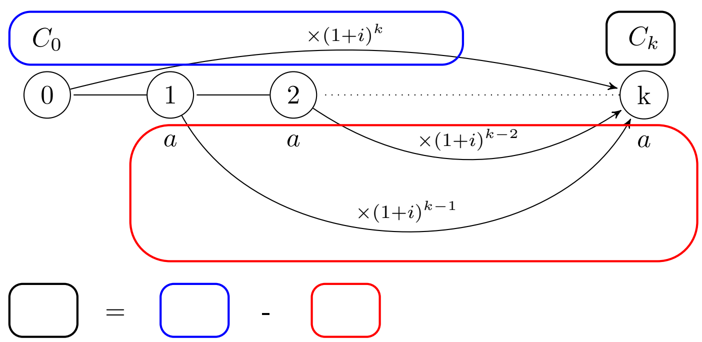
- orduraino amortizazio-kuoten batuketa eginez:

$$\begin{aligned} m_k &= A_1 + A_2 + \cdots + A_k \\ &= A_1 + A_1(1+i) + \cdots + A_1(1+i)^{k-1} \\ &= A_1(1 + (1+i) + \cdots + (1+i)^{k-1}) \\ &= A_1 \frac{(1+i)^n - 1}{i} \\ &= A_1 s_{\overline{n}|\, i} \end{aligned}$$

3.3 Kapital bizia

Bi eratara kalkula daiteke:

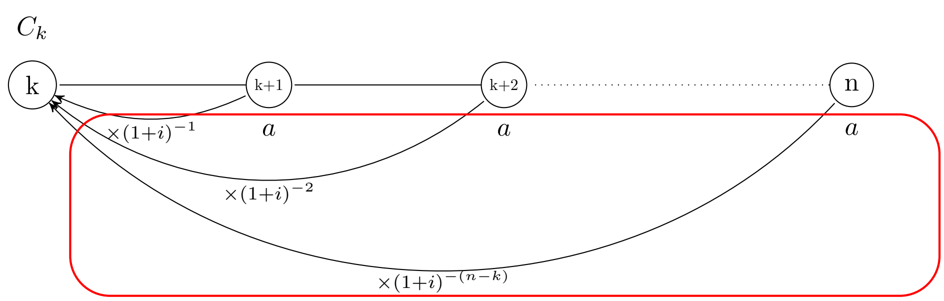
- erretrospektiboki, $C_k = C_0(1+i)^k - a s_{\overline{n|}\,i}$



Irudia 1: k epemuga batean mailegariak zor duena (*beltzez*), hasieran jasotakoa gehi interesekin (*urdinez*) ken ordurarte ordaindutako kuota kapitalizatuak (*gorriz*) egiten da.

- prospektiboki, berriz,

$$C_k = a \times a_{\overline{n-k|}\,i}$$



Irudia 2: k epemuga batean mailegariak zor duena hortik aurrera ordaindu behar dituen kuoten balio deskontatua (*gorriz*) da.

3.4 Interes-kuotak

$k + 1$ epemuga bateko interes-kuota honela kalkulatzen da:

$$I_{k+1} = C_k \times i$$