

# Bernoulli prozesuak eta loturiko banaketak

Josemari Sarasola

Gizapedia

Estatistika enpresara aplikatua



- Har ditzagun honako egoera hauek:
  - txanpon baten jaurtiketak hainbat alditan; adibidez, XXOOOXOXXOO;
  - akastunak eta akasgabeak dituen ontzi batetik itzulerazko erauzketak.
- Aurrekoak **Bernoulli prozesuak** dira, hainbat alditan zehar errepikatu, aldi bakoitzean soilik bi emaitza posible izan, eta aldi horietako emaitzak erabateko independentziaz gertatzen direlako.

# Bernoulli banaketa

Bernoulli banaketak Bernoulli prozesu batean arrakasta (zerbait gertatzea) eta porrota (zerbait ez gertatzea) izateko probabilitateak adierazten ditu:

$x$	$p(x)$
0 (porrota)	$1-p=q$
1 (arrakasta)	$p$
	1

Labur, honela idatziko da:

## Bernoulli banaketa

$$X \sim b(p)$$

Parametro bakarra du:  $p$

- Porrotak eta arrakastak ez dute zerikusirik zerbait txarra edo ona izatearekin, kontsideratzen den ezaugarriarekin baizik. Adibidez, sekuentzia binomial bateko akastun kopurua aztertzean, arrakasta akastuna da.
- Kalkula ditzagun  $b(p)$  banaketaren itxaropena eta bariantza:

$x$	$p(x)$	$xp(x)$	$x^2p(x)$
0 (porrota)	$1-p=q$	0	0
1 (arrakasta)	$p$	$p$	$p$
	1	$p$	$\alpha_2 = p$

$$X \sim b(p) \begin{cases} \mu = p \\ \sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq \end{cases}$$

- Ekoizpen-prozesu batean, pieza akastuna izateko probabilitatea 0.2 da. Piezak elkarrekiko independentziaz ekoizten dira. 8 pieza ekoizten da. Zenbat da horietatik 3 akastun suertatzeko probabilitatea?

$$\begin{aligned}P[8etatik 3X] &= P[XXXOOOOO"eo"] \\&= 0.2 \times 0.2 \times 0.2 \times 0.8 \times 0.8 \times 0.8 \times 0.8 \times 0.8 \times \frac{8!}{3!5!} \\&= 0.2^3 \times 0.8^5 \times \frac{8!}{3!5!}\end{aligned}$$

- XXXOOOOO sekuentziak X eta X eta X eta O eta ... adierazten du. *eta* bitartez loturiko gertaeren probabilitateak horien probabilitateak bidertuz kalkulatu da

$$0.2^3 \times 0.8^5 \times \frac{8!}{3!5!}$$

- Oro har, akastuna izateko probabilitatea  $p$  bada:

$$p^3 \times (1 - p)^5 \times \frac{8!}{3!5!}$$

- Eta ekoiztutako pieza kopurua  $n$  bada:

$$p^3 \times (1 - p)^{n-3} \times \frac{n!}{3!(n-3)!}$$

- Eta  $x$  akastun suertatzeko probabilitatea kalkulatu nahi bada:

$$p^x \times (1 - p)^{n-x} \times \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

# Banaketa binomiala

## Probabilitate-funtzioa

Banaketa binomialak  $n$  luzerako sekuentzia binomial batean  $x$  arrakasta izateko probabilitatea ematen digu ( $p$  izanik aldi bakoitzean arrakasta izateko probabilitatea):

### Banaketa binomialaren probabilitate-funtzioa

$$P[X = x] = p^x \times (1 - p)^{n-x} \times \frac{n!}{x!(n-x)!}; \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

Labur, honela idatziko da:

### Banaketa binomiala

$$X \sim B(n, p)$$

2 parametro ditu:  $n$  eta  $p$

# Banaketa binomiala

Itzaropena eta bariantza

$B(n, p)$  banakuntza  $n$   $b(p)$  Bernoulli banakuntzen batura da:

$$B(n, p) = \overbrace{b(p) + b(p) + \dots + b(p)}^n$$

- Azalpena (8 pieza, zenbat akastun)

$B(8, p)$	$b(p)$	$b(p)$	$b(p)$	$b(p)$	$b(p)$	$b(p)$	$b(p)$	$b(p)$
5 akastun	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1	1	1

(akastun:1, akasgabe:0) (gorriz, gauzaten den gertakizuna)



# Banaketa binomiala

## Itxaropena eta bariantza

Batura baten itxaropena eta batura baten bariantza, hurrenik hurren, itxaropenen batura eta bariantzen batura direnez (azken hau independentzia dagoelako):

$$E[X_{B(n,p)}] = \overbrace{p + p + \dots + p}^n = np$$

$$\text{var}[X_{B(n,p)}] = \overbrace{pq + pq + \dots + pq}^n = npq$$

(Gogoratzu  $b(p)$  baten itxaropena eta bariantza  $p$  eta  $pq$  direla, hurrenik hurren.)

## R softwareko aginduen laburpena

$$X \sim B(10, 0.2)$$

- `dbinom(3,10,0.2) #P[X=3]`
- `pbinom(5,10,0.2) #P[X<=5]`
- `pbinom(4,10,0.2,lower.tail=FALSE) #P[X>4]`
- `1-pbinom(4,10,0.2) #P[X>4]`
- `x=0:10`
- `dbinom(x,10,0.2) #prob simple guztiak`

Artisau batek 0.2ko probabilitateaz egin du zurezko pieza bat ongi. Zenbat pieza landu behar ditu guztira, bataz beste pieza on bat izateko?

Erantzuna 5 da. 5 piezako kopuru horri itzuli-aldia deritzo.

### Itzuli-aldia ( $ia$ )

Itxaropena  $np=1$  izateko behar den  $n$  (aldi edo elementu kopurua) da. Aurreko adibidean:  $5 \times 0.2 = 1$  Beraz,  $ia \times p = 1 \rightarrow p = \frac{1}{ia}$ .

Itzuli-aldia (*return period, periodo de retorno*) bereziki istripu, hondamendi eta kalamidadeen testuinguruan erabiltzen da, horrelako gertaera zorigaitzoko bat noizko espero behar den zehazteko.

Banaketa binomialak  $n$  saialditan  $x$  arrakasta izateko probabilitatea ematen duen bezala, **banaketa geometrikoak lehen arrakasta izan arte  $x$  porrot izateko probabilitatea ematen du.**

Adibidez, lehen akastuna izan arte dagoen akasgabe kopurua zenbatzen bada, arrakasta da akastuna,  $X$ ; porrota, akasgabea,  $0$ :

Sekuentzia	Lehen akastuna izan arteko akasgabe kopurua
00X00XX...	$x=2$
X0X00X0...	$x=0$
000XX00...	$x=3$

$$\text{Adibidez, } P[X = 3] = P[000X] = (1 - p)^3 p$$

## Probabilitate funtzioa

$$P[X = x] = (1 - p)^x p; \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Labur, honela adierazten da:

Adierazpena eta parametroak

$$X \sim G(p)$$

Banaketa geometrikoaren itzaropena

$$E[X_{G(p)}] = q/p$$

Banaketa binomial negatiboak  $r$ -garren arraskata izan arte  $x$  porrot izateko probabilitatea ematen du. Adibidez,

$r$	Sekuentzia	$r$ -garren akastuna izan arteko akasgabe kopurua
2	00X00XX...	$x=4$
1	X0X00XX...	$x=0$
3	XX000XX...	$x=3$

$$P[X = 3]_{r=3} = P[XX000eo ETA Xfinko] = (1 - p)^3 p^2 \frac{5!}{3!2!} p$$

Izan ere, honako sekuentzia hauetan guztietan  $x = 3$  betetzen da:

$$XX000|X / X0X00|X / 00XX0|X / \dots$$

## Probabilitate funtzioa

$$P[X = x] = (1 - p)^x p^{r-1} \frac{[x + (r - 1)]!}{x!(r - 1)!} p; \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Azalpena:  $r$ -garren arrakastaren aurretik,  $r-1$  arrakasta eta  $x$  porrot gertatu behar dira, edozein ordenatan. Eta, azkenik, arraskata bat gertatu behar da.

## Adierazpena eta parametroak

$$X \sim BN(r, p)$$

## Erlazioa banaketa geometrikoarekin

$$BN(r = 1, p) \equiv G(p)$$

## Itxaropena

$$E[X_{BN(r,p)}] = r \times q/p$$

Logikoa,  $BN(r,p)$  banakuntza  $r$   $G(p)$  banakuntzen batura baita. Hausnartu horri buruz.



## Banaketa geometrikoa

$$X \sim G(p = 0.2)$$

- `dgeom(3,0.2)` #P[X=3]
- `pgeom(5,0.2)` #P[X<=5]
- `pgeom(4,10,0.2,lower.tail=FALSE)` #P[X>4]
- `1-pgeom(4,0.2)` #P[X>4]

## Banaketa binomial negatiboa

$$Y \sim BN(r = 3, p = 0.2)$$

- `dnbinom(4,3,0.2)` #P[X=4]
- `pnbinom(5,0.2)` #P[X<=5]

Bernoulli prozesuaren adibiodea:  
OXOXX (arrakasta: X)

Bernoulli prozesuaren banaketak ( $p$ : arrak. prob.,  $n$ : saiakuntza kopurua):

Izena	Notazioa	Aldagaia	Adibidea
Binomial	$B(n, p)$	$n$ saiakuntzako arrakasta kop.	$n=5, x=3$
Geometric	$G(p)$	Lehen arrakasta aurreko porrot kop.	$x=1$
Negative binomial	$BN(r, p)$	$r$ -gn arrakasta aurreko porrot kop.	$r=2, x=2$

Izena	Formula	Euskarria
$B(n, p)$	$P[X = x] = p^x (1 - p)^{(n-x)} \frac{n!}{x!(n-x)!}$	$x = 0, 1, 2, \dots, n$
$G(p)$	$P[X = x] = (1 - p)^x p$	$x = 0, 1, 2, \dots$
$BN(r, p)$	$P[X = x] = (1 - p)^x p^{r-1} \frac{[x + (r - 1)]!}{x!(r - 1)!} p$	$x = 0, 1, 2, \dots$