Gizapedia

gizapedia.org

ESTATISTIKA ENPRESARA APLIKATUA

Ariketak

Egilea: Josemari Sarasola

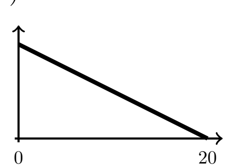
1 Zorizko aldagaiak

1.1 Zorizko aldagaiak diskretuak

1. Makina batean egun batean gertatzen diren matxurak 0-9 bitartekoak izan daitezke. 0-4 bitarteko probabilitate bakoitza 5-9 bitarteko probabilitate bakoitza bider bi direla uste da.
   (a) Zehaztu probabilitate-funtzioa, analitikoki nahiz taula moduan.
   (b) Eman banaketa-funtzioa, taula moduan.
   (c) Eguneko matxurak konpontzeko pieza bana behar bada, zenbat pieza eduki behar dira prest egunaren hasieran matxura guztiak konpontzeko probabilitatea gutxienez 0.7 izan dadin? Eta 0.9 izan dadin?
   (d) Probabilitate-funtzioa nahiz banaketa-funtzioa grafikoki adierazi.
2. Bezero berri bat lortu arte egin behar den bisita kopurua honela banatzen dela uste da:
$$P[X = x] = 0.1 + \frac{k}{x} \; ; \; x = 1, 2, 3, 4$$
   (a) Zenbatekoa izan behar da k probabilitate-funtzioa izateko?
   (b) Probabilitate-funtzioa eta banaketa funtzioa taula moduan adierazi.
3. X zorizko aldagaia honela banatzen dela uste da:
$$P[X = x] = \frac{1}{k} \; ; \; x = 1, 2, \ldots, k$$
   Zenbatekoa izan behar da k probabilitate-funtzioa izateko?
4. X zorizko aldagaia honela banatzen dela uste da:
$$F(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x \; ; \; x = 1, 2, \ldots$$
   (a) Zenbat dira $P[X = 3]$ eta $P[X = 2]$?
   (b) Eta $P[X > 4]$?
   (c) Eta $P[X < 6]$?

1.2 Zorizko aldagai jarraituak

5. Iturri bateko uretan gai kutsakor baten onargarria den gehienezko edukiari dagokionean heltzen den x portzentajea (batekoetan) honela banatzen dela uste da:
$$f(x) = 2 - 2x \; ; \; 0 < x < 1$$
   (a) Dentsitate-funtzioa grafikoki irudikatu eta interpretatu behar da.
   (b) Zenbatekoa da gehienezko edukiaren %10era gehienez heltzeko probabilitatea?
   (c) Gehienezko edukiaren %50era heltzen denean, arrisku-egoera ezartzen du enpresak. Zenbatekoa da hori gertatzeko probabilitatea?
   (d) Zenbatekoa da portzentajea %20-%30 tartean izateko probabilitatea? Oharra: %20 eta %30 barne nahiz kanpo (tarte itxia nahiz irekia).
   (e) Banaketa-funtzioa definitu eta, horretan oinarrituta, aurreko probabilitateak kalkula itzazu.
   (f) Egiaztatu aurrekoak egiazki dentsitate- eta banaketa-funtzioa direla.
   (g) Arrisku-egoera ezartzeko probabilitatea 0.2 izatea nahi bada, zenbatekoa izan behar da horretarako portzentajea?
6. Denda bateko eguneko salmentak (milaka eurotan) honela banatzen direla ezarri da:



(a) Dentsitate-funtzioa zehaztu behar da.

(b) Banaketa-funtzioa zehaztu behar da.

(c) Kalkulatu eguneko salmenta 10 mila euro baino txikiagoa izateko probabilitatea, dentsitate- funtzioa nahiz banaketa-funtzioa baliatuz.

(d) Egun ezberdinetako salmenten artean erabateko independentzia badago, zenbatekoa da salmentak 5 egunetan jarraian 10 mila euro baino handiagoak izateko probabilitatea? Hori benetan gertatu bazen, zein ondorio atera behar da?

7. X zorizko aldagai bat honela banatzen dela uste da:

$$f(x) = k - x \; ; \; 0 < x < k$$

(a) Dentsitate-funtzioa izan dadin k balioa kalkulatu.

(b) Banaketa funtzioa zehaztu.

(c) $P[0.5 < X < 1]$ probabilitatea kalkulatu dentsitate-funtzioa nahiz banaketa-funtzioa erabiliz.

8. Eguneko ekoizpena (kilotan) enpresa batean zorizko aldagaitzat hartu da, k makina kopuruaren mendean. Honela banatzen dela ezarri da:

$$f(x) = \frac{2x}{100k^2} \; ; \; 0 < x < 10k$$

(a) Froga ezazu k parametroa dela.

(b) 4 makina daudelarik, zenbatekoa da ekoizpena 30 baino handiagoa izateko probabilitatea?

(c) Banaketa funtzioa kalkulatu, k zehaztu gabe. Horretan oinarrituta, frogatu k parametroa dela eta kalkulatu aurreko galderako probabilitatea.

(d) Produktua kiloka paketeratzen bada, zenbat kaxa behar dira, sei makina daudelarik, ekoizpena paketeratu ahal izateko probabilitatea 0.8 izan dadin? Eta 0.9 izan dadin?

(e) Zenbat makina behar dira ekoizpena 60 baino handiagoa izateko probabilitatea 0.5 gutxienez izan dadin?

9. Ataza bat egiteko denbora honela banatzen dela uste da:

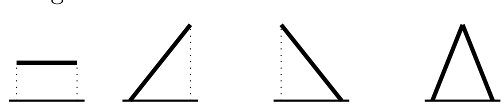
$$F(x) = \frac{x^3 - 8}{19} \; ; \quad 2 \leq x \leq 3$$

(a) Frogatu banaketa funtzioa dela.

(b) Dentsitate-funtzioa eman.

(c) $P[X \geq 2.5]$ kalkulatu banaketa- zein dentsitate-funtzioa erabiliz.

10. Dentsitate-funtzio hauetako bakoitzari dagokion banaketa-funtzioa irudikatu:



1.3 Jarraituzko hurbilketak

11. Denda batean saltzen diren laranjen pisua (gr) honela banatzen dela uste da:

$$f(x) = \frac{2}{10000}(x - 100) \; ; \; 100 < x < 200$$

(a) Zenbatekoa da laranja baten pisua hertsiki 110 gramukoa izateko probabilitatea?

(b) Zenbat da 110 gramukoa izateko probabilitatea, jakinda balantzak 100-110-120-130-... erregistroak ematen dituela?

(c) Zenbat da 130 gr edo pisu txikiagoa izateko probabilitatea?

12. Denda batera egunero hurbiltzen den pertsona kopurua honela banatzen dela uste da:

$$f(x) = \frac{1}{100} \; ; \quad 200 < x < 300$$

(a) Zenbatekoa da hertsiki 250 pertsona etortzeko probabilitatea?

(b) Zenbat 250-260 pertsona bitartean etortzeko probabilitatea, biak barne?

1.4 VaR: Value at Risk

13. Bi inbertsioren errendimenduen banaketak zehazten dira jarrian:

$$X : f(x) = \frac{x}{2} \; ; \; 0 < x < 2$$

$$Y : f(x) = 1.11x \; ; \; 0.1 < x < 1$$

   (a) Erabaki inbertsio egokiena $VaR(0.01)$, $VaR(0.05)$, eta $VaR(0.10)$ irizpideak baliatuz.

   (b) Interpretatu hitzez $Var(0.05)$ balioa, errendimenduaren maiztasunaren terminoetan.

14. Bono baten errentagarritasuna urtebetera honela banatzen dela uste da:

$$F(x) = \frac{x^2 - 4}{12}; 2 \leq x \leq 4$$

   Kalkulatu %1 eta %5eko arrisku-balioak eta interpretatu errendimenduaren maiztasun-terminoetan.

2 Itxaropena eta bariantza. Momentuak.

15. Hilero enpresa batek salduko duen makina kopurua honela banatzen dela uste da:

Kopurua	Probabilitatea
0	0.05
1	0.2
2	0.25
3	0.25
4	0.15
5	0.1
	1

   Itxaropen matematikoa kalkulatu behar da. Azkenean, bi hilabetetan zehar, 4 eta 5 saldu da, hurrenik hurren. Kalkulatu salmenten batezbesteko aritmetikoa, eta azaldu ezazu itxaropenarekiko diferentzia.

16. Makina batek egunero egiten duen pieza kopurua (milaka unitatetan) honela banatzen dela uste da:

$$f(x) = \frac{x}{2} \; ; \; 0 < x < 2$$

   Irudikatu dentsitate-funtzioa eta hurbildu ezazu, aliritzira, itxaropen matematikoa. Zehazki kalkulatu ezazu.

17. Makina-modelo baten hileko salmentak 1 edo 2 izan daitezke, 0.4 eta 0.6ko probabilitateaz hurrenik hurren.

   (a) Zenbatekoa da bihileko bateko salmenten batezbestekoa?

   (b) Makina bakoitzeko kostu aldakorra eta salmenta-prezioa 100 eta 200 eurokoak badira hurrenik hurren, zenbat da mozkinaren itxaropen matematikoa hileko, hileko kostu finkoa 50 eurokoa bada?

   (c) Azken hiru hilabeteetan 2, 1 eta 2 makina saldu ziren hurrenik hurren, zenbat da hilabeteko mozkinaren batezbestekoa? Enpresak suerte txarra ona ala txarra izan du 3 hilabete horietan?

18. Hozkailu bateko uneko tenperaturak parametrodun banaketa honi jarraitzen diola uste da:

$$f(x) = \frac{1}{a} \; ; \; 0 < x < a$$

   (a) Grafikoki irudika ezazu eta interpretatu itxaropenari dagokionean.

   (b) Kalkulatu itxaropena eta desbideratze estandarra.

   (c) Birparametrizatu dentsitate-funtzioa eta desbideratzea batezbestekoaren arabera. (Soluzioa)

19. Pieza batek duen akats kopurua honela banatzen dela uste da:

Akatsak piezako	Probabilitatea
0	0.5
1	0.4
2	0.1
	1

(a) Kalkulatu itxaropena eta desbideratze estandarra.

(b) Batez beste zenbat akats izango dira 100 piezetan?

(c) Pieza batetik bestera independentzia suposatuz, zenbatekoa da akats kopuru totalaren desbideratzea? Eta independentzia ez badago?

(d) Akats bakoitzak enpresarentzat dakarren kostua 10€ da, gehi 20€-ko kostu finkoa erreklamazio-zerbitzua edukitzeagatik. Kalkulatu itxarondako kostua pieza bakoitzeko, eta horren desbideratzea, itxaropenaren nahiz bariantzaren propietateak erabiliz nahiz kostu posible eta horien probabilitateen zehaztapenetik. (Soluzioa)

20. Lantegi batean lehenengo egun batean ekoizpena 2 zein 3 izan daiteke 0.3 eta 0.7ko probabilitateaz hurrenez hurren. Biharamunean, bezperako ekoizpena 2 izan bada, ekoizpena berdin bilakatzen da; 3 izan bada, ekoizpena 3 zein 4 izan daiteke, 0.3 eta 0.7ko probabilitateaz. Horrela egunetik egunera gertatzen da: ekoizpen maximoa gertatzen bada, bat gehiago ekoiz daiteke biharamunean; bestela, bezperan bezala gertatzen da.

(a) Zenbatekoa da 4 egunetan 12 edo gehiago ekoizteko probabilitatea?

(b) Ekoizpenen itxaropena eman 4 egunetan zehar.

(c) Piezak egunean zehar uniformeki ekoizten badira, zenbat denbora behar da batez beste 8 pieza egiteko? (Soluzioa)

21. Lantegi batean langile bakarra aritzen da egun batean. Haren ekoizpena 1 edo 2 izan daiteke, 0.4 eta 0.6ko probabilitateaz. Ekoizpena 1 bada, biharamunean bigarren langile gehigarri bat kontratatzen da, lehenengoarekin independentziaz arituko dena, eta ekoizpena 1 edo 2 izango duena baita ere, probabilitate berdinekin. Lehen eguneko ekoizpena 2 bada, berriz, bigarren egunean langile berdina aritzen da bakarrik.

(a) Zenbat da bi egunetako itxarondako ekoizpena?

(b) Zenbat denbora behar da batez beste 2 unitate osorik ekoizteko?

2.1 Itxaropena, erabaki-irizpidea

22. Enpresa batek bi aktibo ditu aukeran inbertsio moduan. Eguneko errendimenduak honela banatzen dira:

A aktiboa:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{8}\ ;\ 0 < x < 4$$

B aktiboa:

$$f(x) = \frac{1}{5};\ 0 < x < 5$$

Utilitate-funtzio moduan hau baliatu behar da:

$$U = \frac{\mu}{\sigma}$$

Aztertu zein den erabaki hoberena, epe laburrera nahiz epe luzera.

23. Enpresa batek lau inbertsio ditu aukeran. Erabakiek dakartzaten mozkinak zorizkoak dira eta era honetan banatzen direla uste da:

Mozkina	A aukera	B aukera	C aukera	D aukera
-2	0.05	0	0	0.05
-1	0.25	0.20	0.15	0.10
0	0.30	0.50	0.40	0.35
1	0.20	0.25	0.30	0.40
2	0.20	0.05	0.15	0.10

Utilitate-funtzio moduan hau baliatu behar da:

$$U = \frac{2\mu}{\sigma} - P[galera]$$

(a) Utilitate-funtzio egokia dela egiaztatu.

(b) Binaka harturik, azter ezazu inbertsio aukeren preferentzia, μ eta σ kontuan harturik.

(c) Ordenatu inbertsioak itxaropenaren, arriskuaren eta galtzeko probabilitatearen arabera eta ondoren aztertu zein den erabaki hoberena.

2.2 Egunkari saltzailearen problema

24. Ordenagailu modelo berri batetik zenbat ale erosi behar dituen erabaki behar du dendari batek hurrengo hilabeterako. Eskaria (x) honela banatzen dela uste da:

x	3	4	5	6	7
p(x)	0.15	0.20	0.30	0.20	0.15

Ordenagailuak 200 eurotan erosi eta 400 eurotan saltzen ditu. Saldu gabeak 100 eurotan likidatu behar ditu.

(a) Zenbat ordenagailu erosi behar ditu irabaziak maximotzeko?

(b) Kalkulatu eta aldera itzazu, hurrenez hurren 6 eta 5 ordenagailu erosita, problemaren beste ohiko parametroak, aurretik hausnartuz 5 ordenagailu erosita 6 ordenagailu erosita baino handiagoak edo txikiagoak suertatuko diren.

25. Dendari batek laranjak erosi behar ditu. Kiloko 1€ ordaintzen du, eta 2€-tan saltzen ditu. Saltzen ez dituenak bota egin behar ditu. Datorren asterako eskaria honela banatzen dela uste du:

$$f(x) = \frac{x}{160.000};\ 0 < x < 400\ ;\ x : kg$$

Kalkulatu erosi beharreko laranja kantitatea mozkinak batez beste maximotzeko.

2.3 Txebixev-en desberdintza

26. Eguneko ekoizpena lantegi batean nola banatzen den ez da zehaztu, baina batez beste 100 unitatekoa dela jakin da, desbideratzea 20 unitatekoa delarik. Zenbat da ekoizpena 60-140 tartean izateko probabilitatea?

27. Lantegi batean 1000 mmko piezak egin behar dira. Batez beste bete egiten du helburua, baina 100mmko desbideratzeaz. Pieza ontzat jotzen da neurri estandarretik 300 mm baino gutxiago desbideratzen denean. Zenbatekoa da pieza okerra izateko probabilitatea?

28. Denda bateko salmentak batez beste 2000 eurokoak dira egun normal batean, desbideratzea 200 eurokoa delarik. Salmentak 2600 eurotik gora izango direla aurresaten denean, langile berriei deituko zaie. Zenbatekoa da hau gertatzeko probabilitatea?

29. Taberna batean egunero eskatzen den ogitarteko kopurua batez beste 100 da. Desbideratzea 10 ogitarteko da.

(a) Zenbat opil erosi behar dira eskatzen diren ogitarteko guztiak egiteko nahikoa izateko probabilitatea 0.9 izan dadin?

(b) Eta 0.99 izan dadin?

(c) Eta nahikoa izateko probabilitatea 0.99 izanda, desbideratzea 20 bada?

30. Eguneko salmenten batezbestekoa denda batean 1000 eurokoa da. Desbideratzea 200 eurokoa da. 3 eguneko salmentak 2800 euro baino txikiagoak izateko probabilitatea hurbildu behar da.

3 Prozesu binomialak

3.1 Banaketa binomiala

31. Edozein ikaslek azterketa jakin bat ez gainditzeko probabilitatea 0.7 da.

(a) 10 ikasleetatik zenbatekoa da 4k azterketa ez gainditzeko probabilitatea?

(b) Eta 6 ikaslek ez gainditzeko probabilitatea?

(c) Eta x ikaslek ez gainditzeko probabilitatea?

(d) Labur, nola adierazten da gainditu ez dutenen kopurua horrela banatzen dela?

(e) Ikasle bakoitzari dagokionean, zein ezaugarrik hartzen du 1 balioa (beste hitzetan, zein da arrakasta) aurreko probabilitateekin loturik?

(f) Beste azterketa batean 8 baino gehiago ateratzen duten ikasleen kopurua $B(22, 0.4)$ banatzen da. Kalkulatu $P[X = 10]$.

32. Lantegi batean 12 pieza egin behar dira bezero batentzat. Pieza bakoitza akastuna izateko probabilitatea 0.12 da.

(a) Nola banatzen da pieza akastunen kopurua?

(b) Nola banatzen da pieza akasgabeen kopurua?

(c) Zenbat da 4 pieza akastun suertatzeko probabilitatea?

(d) Zenbat da 3 pieza akasgabe suertatzeko probabilitatea? Akastunen terminoetan, nola adierazi behar da aurreko probabilitatea?

(e) Zenbat da 3 akasgabe eta 9 akastun suertatzeko probabilitatea?

(f) Zenbat da akastun kopurua 2 edo txikiagoa izateko probabilitatea?

(g) Zenbat da akastun kopurua 3 baino txikiagoa izateko probabilitatea? Akasgabeen terminoetan, nola adierazi behar da aurreko probabilitatea?

(h) Zenbat da akastun kopurua 8 baino handiagoa izateko probabilitatea?

(i) Larson nomograma baliatuz, eman aurreko bi galderetako probabilitateak.

(j) Zenbat da akastun kopurua 10 edo handiagoa izateko probabilitatea?

(k) Zenbat da akastun kopurua 4 eta 6 artean izateko probabilitatea, biak barne?

(l) Aurreko guztiak R softwarearen bidez ebatzi.

(m) Zenbat da batez besteko akastun kopurua?

(n) R baliatuz, zein da probabilitate handieneko akastun kopurua?

(o) R baliatuz, bezeroari zenbat akastun ziurta dakizkioke 0.9ko gutxieneko probabilitateaz? (Soluzioa)

33. Herri batean 300 emakume eta 200 gizonezko daude.

(a) Zoriz eta itzuleraz 90 pertsona aukeratzen badira, nola banatzen da emakume kopurua? Eta itzulerarik gabe egingo balitz?

(b) Zenbat da emakume proportzioarekin bat datorren emakume kopurua suertatzeko probabilitatea?

(c) Aurreko emakume kopurua banaketa binomialaren zein ezaugarrirekin dator bat?

(d) Zenbat da emakume kopurua itxaropenaren inguruko ± 10 zabalerako tarte batean izateko probabilitatea?

(e) Interpretatu (b), (c) eta (d) emaitzak.

(f) Kalkulatu (d) ataleko probabilitatea, itxaropena eta bariantza soilik direla ezagunak suposaturik. (Soluzioa)

34. Toki batean egun batean euria egiteko probabilitatea 0.4 da eta egun batetik bestera erabateko independentzia dago. Bertako teilatu bat konpontzeko 7 egun ateri behar dira. Zenbat egunetarako alokatu behar da garabi bat teilatuaren konponketa burutu ahal izateko probabilitatea 0.9 izan dadin? Eta probabilitatea 0.99 izan dadin? (Soluzioa)

35. Bezero batek 10 piezako loteak erosten dizkio enpresa bati. Bezeroak pieza guztiak aztertzen ditu aurretik eta lotean pieza akastun bat aurkitzen badu, lotea atzera botatzen du. Pieza bat akastuna izateko probabilitatea %15 da. Urtean erosten dituen 25 loteetatik %20 baino gehiago atzera botatzen baditu, kontratua eten egiten du.

(a) Zenbat da kontratua eteteko probabilitatea?

(b) Zenbat izan behar da pieza bat akastuna izateko probabilitatea lotea atzera botatzeko probabilitatea 0.30 izan dadin gehienez? (Soluzioa)

36. Hegazkin baterako egiten diren erreserben %25a bertan behera uzten direla zenbatetsi da. Hegazkin batean 12 eserleku daude. Zenbat erreserba egin daitezke *overbooking* gertatzeko probabilitatea 0.15 izan dadin gehienez?

3.2 Itzuli-aldiak banaketa binomialean

37. Urtean uholde bat izatearen itzuli-aldia 8 urtekoa bada, zer da probableagoa 6 urtera: uholdea gertatzea ala ez gertatzea? (Soluzioa)

38. Eraiki berri den zubi bat botako duen lurrikara batez beste 1000 urtetan behin gertatzen dela uste da.

(a) Zenbat da zubiak 100 urtera zutik irauteko probabilitatea?

(b) Zenbat urtetarako iraungo du zubiak zutik 0.95eko probabilitateaz? (Soluzioa)

3.3 Banaketa binomialarekin loturiko proba estatistikoak

39. Lantegi batean normalean piezen %2 dira akastun.

    (a) Azken 10 piezetan 2 akastun aurkitu badira, prozesua oker dabilela pentsatu behar al da? Adierazgarritasun-maila: %20.

    (b) Probatu akastunen proportzioa %10 den, ez gehiago ez gutxiago. Adierazgarritasun-maila: %5.

    (c) Probatu akastunen proportzioa %30 den, ez gehiago ez gutxiago. Adierazgarritasun-maila: %10.

40. Test batean 20 galdera daude. Galdera bakoitzeko 5 aukera daude. Pertsona batek 20 galderetatik 6 asmatu ditu. Erantzunak zoriz eman ditu ala zerbait badakiela erabaki behar al da? Adierazgarritasun-maila: %10.

41. Bost langileren artean, Josemari tartean dela, 15 makina saldu dituzte feria batean. Josemarik 15etatik 10 saldu ditu. Saltzaile hobea dela esan al daiteke? Adierazgarritasun-maila: %1.

42. Iaz gertatu ziren 15 istripuetatik, 10 istripu jaiegunetan izan ziren. Jaiegunetan istripuak ugariagoak direla esan al daiteke? Adierazgarritasun-maila: %1. Urtean 82 jaiegun izan ziren. (Soluzioa)

43. Lantegi batean 4 langile ari dira lanean. Egunero 6na pieza egin dituzte. Egun batean egindako 24 piezetan 6 akastun suertatu dira. Kepak akastun bakarra egin du. Piezak beste langileek baino hobeki egiten dituela ondorioztatu behar al da? Adierazgarritasun-maila: %1. (Soluzioa)

44. Paketeak entregatzen dituen enpresa bateko ibilbide bat programatzerakoan, pakete bat A puntuan entregatu behar izateko probabilitatea 0.09 dela suposatu da, ez gehiago ez gutxiago. Azken 14 paketeetatik 4 A puntuan entregatu behar izan dira. Birprogramazioa egin behar dela erabaki behar al da? Adierazgarritasun maila: %1. Zein da adierazgarritasun-maila txikia finkatzearen ondorioa? Zergatik uste duzu ezarri dela hemen alfa txikia? (Soluzioa)

3.4 Zeinuen proba

45. Denda bateko larunbateko salmenta batzuk jaso ziren 2017 urtean:

    46-87-56-64-55-67-64-65-72-75-98

    (a) Mediana 60 den probatu ezazu, p-balioa nahiz balio kritikoa baliatuz. α=%10. (Soluzioa)

    (b) Mediana 70 baino txikiagoa den probatu ezazu. Adierazgarritasun-maila: %10.

    (c) Mediana 80 baino handiagoa den probatu ezazu. Adierazgarritasun-maila: %10.

46. Ataza bat egiteko langile batzuek behar izan zituzten denborak jaso ziren trebakuntza ikastaro bat jaso aurretik eta ondoren:

    Aurretik: 46-87-56-64-55-67-64-65-72-75-98
    Ondoren: 48-67-62-60-53-60-65-60-68-72-81

    Ikastaroak ataza egiteko denboraren mediana gutxitu al du? Adierazgarritasun-maila: 0.10

47. Test batean izandako puntuazioak jaso dira:

    67-78-75-81-82-77-72-69-87-75

    (a) Mediana 80 den probatu zeinuen testaren bitartez eta taulako balio kritikoak erabiliz. Kalkulatu p-balioa. $\alpha =$ %10.

    (b) Mediana 75 baino handiagoa den probatu behar da. $\alpha =$ %10.

    (c) Trebakuntza ikastaro baten ondoren, aurreko ikasleen puntuazio berriak jaso dira:

    69-77-79-85-86-76-73-68-88-78

    Trebakuntza ikastaroa mesedegarria izan al da? $\alpha =$ %10.

    (d) Medianarako %90eko eta %80ko konfiantza tarteak eratu itzazu. (Soluzioa)

3.5 Banaketa geometrikoa. Banaketa binomial negatiboa.

48. Lantegi batean pieza akastun bat ekoizteko probabilitatea 0.12 da.

    (a) Nola banatzen da lehen akastuna izan arte suertatzen den akasgabe kopurua?

(b) Zenbat da lehen akastuna suertatu arte 6 akasgabeko lote bat suertatzeko probabilitatea?

(c) Zenbat da lehen akastuna izan arte 2 akasgabe edo gutxiago izateko probabilitatea?

(d) Zenbat da lehen akastuna izan arte batezbesteko akasgabe kopurua?

(e) Zenbat da lehen akasgabea izan arte 2 akastun izateko probabilitatea?

(f) Zenbat da lehen akasgabea izan arte batezbesteko akastun kopurua?

49. Lantegi batean pieza akastun bat ekoizteko probabilitatea 0.12 da.

(a) Nola banatzen da hirugarren akastuna izan arte suertatzen den akasgabe kopurua?

(b) Zenbat da hirugarren akastuna izan arte 6 akasgabeko lote bat suertatzeko probabilitatea?

(c) Zenbat da hirugarren akastuna izan arte 2 akasgabe edo gutxiago izateko probabilitatea?

(d) Zenbat da hirugarren akastuna izan arte batezbesteko akasgabe kopurua?

(e) Zenbat da laugarren akasgabea izan arte 2 akastun izateko probabilitatea?

(f) Zenbat da laugarren akasgabea izan arte batezbesteko akastun kopurua?

4 Banaketa hipergeometrikoa eta Fisher proba zehatza

50. Ontzi batean 20 pieza akastun eta 80 pieza akasgabe daude. 5 pieza erauzten dira zoriz eta batera.

(a) Kalkulatu 3 pieza akastun izateko probabilitatea, koefiziente binomialen bitartez nahiz probabilitate sinpleak bidertuz.

(b) Zenbatekoa da akastun kopuruaren itxaropen matematikoa?

(c) Kalkulatu emaitza posible guztien probabilitateak. Moda kalkulatu aurreko emaitzak ikusiz zein formula erabiliz.

(d) Adierazi eta kalkulatu (a) atalean kalkulatutako probabilitatearen probabilitate simetriko guztiak.

(e) Kalkulatu bariantza eta alderatu 5 piezak itzuleraz aukeratuko balira suertatuko liratekeen pieza akastunen bariantzarekin.

(f) Kalkulatu piezen %60 akastuna izateko probabilitatea, 5 pieza nahiz 25 pieza aterata, eta emaitzak alderatu. (Soluzioa)

51. *Tearen dastaketa esperimentua*: Tea esnearekin hartzen duen andre batek katilura lehenbizi tea edo esnea bota zen esateko gai dela baieztatzen du, soilik tea esnearekin dastatuz. Hori probatzeko, begiak ixten zaizkio eta 8 katilu ematen zaizkio dastatzeko, horietatik 4tan esnea tea baino lehenago eta beste 4tan tea esnea baino lehenago botata. Andreak 2 kasutan asmatu zuen esnea tea baino lehenago bota zela, eta 3tan tea esnea baino lehenago bota zela. Fisherren proba zehatza baliatuz, datu horiekin andreak tea edo esnea lehenago bota zela asmatzeko joera duen aztertu behar da. $\alpha = 0.1$.

52. Zoriz aukeratutako pertsona batzuengan sexua eta jarrera politikoa (eskuina/ezkerra) jaso dira:

Sexua ↓ / Jarrera →	Eskuina	Ezkerra	Guztira
Gizona	6	8	14
Emakumea	11	4	15
Total	17	12	29

(a) Fisherren proba zehatza erabiliz, probatu emakumeek eskuinerako joera nabarmenagoa ba ote duten. $\alpha = 0.1$.

(b) Proba burutu ezazu piboteak aldatuz.

5 Poisson banaketa

53. Makina batean 4.2 matxura gertatzen dira orduko batez beste eta zoriz.

(a) Zenbat da 2 ordutan matxurarik ez izateko probabilitatea?

(b) Kalkulatu ordu batean 2, 3, 4 eta 28 matxura izateko probabilitateak, hurrenez hurren. Emaitzak interpretatu.

(c) 22 minutuko lan bat egin behar da. Zenbatekoa da lana egin ahal izateko probabilitatea?

(d) Zenbat da 2 ordutan 3 matxura edo gutxiago izateko probabilitatea?

(e) Zenbat da 2 ordutan 8 matxura edo gehiago izateko probabilitatea?

(f) Zenbat da 2 orduko matxura kopurua 10 eta 15 artean, biak barne, izateko probabilitatea?

(g) Zenbat da matxura batetik bestera 2 ordu gutxienez izateko probabilitatea? (Soluzioa)

(h) Tailerrean beste makina bat dago eta hartan 6 matxura gertatzen dira orduko, batez beste eta zoriz. Zenbat da tailerrean ordu batean 10 matxura edo gutxiago izateko probabilitatea?

(i) Zenbat matxura ziurta daitezke ordu batean 0.9ko probabilitateaz? Eta 0.99ko probabilitateaz? Makinaren saltzailearen nahiz ekoizpen arduradunaren ikuspuntutik kalkulatu. Oharra: R bidez ebatzi.

54. Gaixotasun jakin batek jota astero ospitale batera sartzen diren gaixoen kopurua batez beste 8.6 da eta tasa horretan zoriz eta independentziaz banatzen dira denboran zehar. Gaixotasunari aurre egiteko gaixoek botika baten dosi bana behar dute.

(a) Zenbat dosi prestatu behar dira gaixo guztiak sendatu ahal izateko probabilitatea 0.9 izan dadin? Eta 0.99 izan dadin? Soluzioak: 0.9rako, 12; 0.99rako, 16.

(b) Bi astetan zehar 24 gaixo sartu dira. Bi aste horietan gaixotasunaren intzidentzia (ikus, Gizapedian, prebalentzia eta intzidentzia) gehitu egin dela esan al daiteke? Adierazgarritasun-maila: 0.01.

(c) Gaixoen gehikuntzaz kezkaturik, prebentzio kanpaina bati ekin zaio. Kanpainaren ondorengo 4 asteetan 14 gaixo izan dira. Kanpaina eraginkorra izan dela esan al daiteke? Adierazgarritasun-maila: 0.01.

55. Denda berri batean kaxara bezeroak zoriz eta independentziaz heltzen direla uste da, minutuko batezbestekoa 6 bezero izanik. Bezeroa bakoitzari kobratzeko 2 minutu ematen direla uste da. Kaxan zenbat langile jarri behar dira bezeroek itxaron behar ez izateko probabilitatea 0.9 izan dadin? (Soluzioa)

5.1 Poisson banaketa, binomialaren limite gisa

56. Ekoizpen prozesu batean akastuna suertatzeko probabilitatea 0.0022 da. 4000 piezako lote bat saldu da, baina 6 akastun baino gehiago izanez gero itzuli egingo da.

(a) Zenbatekoa da lotea itzultzeko probabilitatea? Kalkulatu banaketa binomialaz eta Poisson banaketaz. Zein da lambda parametroaren esanahia?

(b) 1000 piezetan, zenbat akastun ziurta daitezke gehienez 0.9ko probabilitateaz?

(c) Zenbat akastun ziurta daitezke bezero baten ikuspuntutik probabilitate berdinarekin? (Soluzioa)

57. Langile batek urtebetean lan istripu bat izateko probabilitatea 0.0012 da.

(a) Batez beste zenbat istripu gertatzen dira 1000 langileko?

(b) Enpresa bateko lantegietan 3400 langile daude eta 7 istripu izan ziren urte batean. Lantegi horietan lan-segurtasuna besteetan bezain egokia ez dela esateko arrazoirik ba al da? Adierazgarritasun-maila: %5. (Soluzioa)

5.2 Itzuli-aldiak Poisson banaketan

58. Urtean uholde bat izatearen itzuli-aldia 8 urtekoa da.

(a) Zer da probableagoa 6 urtera, uholdea gertatzea ala ez gertatzea?

(b) Zenbat urtera da uholdea izateko probabilitatea uholderik ez izatekoa probabilitatearen berdina? (Soluzioa)

59. Eraiki berri den zubi bat botako duen lurrikara batez beste 1000 urtetan behin gertatzen dela uste da.

(a) Zenbat da zubiak 100 urtera zutik irauteko probabilitatea?

(b) Zenbat urtetarako iraungo du zubiak zutik 0.95eko probabilitateaz? (Soluzioa)

5.3 Banaketa esponentziala

60. Makina batek segurtasunezko geldialdiak izaten ditu. Orduko batez beste 2 geldialdi izaten dela uste da, zoriz eta independentziaz.

(a) Zenbat da ondoz ondoko geldialdien arteko denbora 20 minutu baino luzeagoa izateko probabilitatea? Minututan nahiz ordutan burutu itzazu kalkuluak.

(b) Zenbat da hurrengo geldialdia izan arteko denbora 20 minutu baino luzeagoa izateko probabilitatea?

(c) Zenbat da denbora hori 20-30 minutu bitartekoa izateko probabilitatea? (Soluzioa)

61. Makina batean matxura batetik bestera igarotako denboraren batezbestekoa 10 minutukoa da eta matxurak zoriz eta elkarrekiko independentziaz gertatzen dira.

    (a) Zenbatekoa da matxura batetik bestera 5 minutu baino gehiago igarotzeko probabilitatea?

    (b) Azken matxuratik 60 minutu igaro badira, zenbatekoa da hurrengo matxura gertatu bitartean gutxienez beste 5 minutu igarotzeko probabilitatea?

    (c) Emaitzak interpretatu.

62. Webgune batek erabat zoriz eta batez beste 4 bezeroren bisitak hartzen ditu orduko. Webgunea 40 minutuz hondaturik geratu da. Zenbatekoa da epe horretan bezero bat gutxienez galdu izanaren probabilitatea? Bi modutara ebatzi behar da: bezero kopuruari buruz zein bezeroen arteko denborari buruz. (Soluzioa)

63. Kaxa batera bezeroen etorrera zoriz eta independentziaz gertatzen dela uste da. Bezero bat etorri bitarteko denboraren batezbestekoa 5 minutukoa da. Hurrengo bezeroa 20 minutura heldu da. 5 minutuko batezbestekoa kolokan jartzeko moduko zantzua al da? Adierazgarritasun maila: %1. (Soluzioa)

5.4 Gamma banaketa

64. Zerbitzu baterako etorreren batez besteko kopurua 1.4 da minutuko, erabat zoriz.

    (a) Nola banatzen da 4garren etorrera bitarteko denbora?

    (b) Zenbat da 4garren etorrera bitartean 15 minutu baino gehiago izateko probabilitatea?

    (c) Zenbat da 4garren etorrera bitarteko denboraren batezbestekoa eta bariantza? (Soluzioa)

65. Bezero batetik bestera 4 minutu igarotzen dira batez beste, bezeroak erabat zoriz heltzen direlarik.

    (a) Zenbat da 2garren bezeroa heldu bitartean 5 minutu baino gehiago izateko probabilitatea?

    (b) Zenbat da 6garren bezeroa heldu bitartean 15 minutu baino gutxiago izateko probabilitatea?

    (c) Zenbat da 6garren bezeroa heldu bitarteko denboraren batezbestekoa eta bariantza? (Soluzioa)

6 Banaketa uniformea

6.1 Banaketa uniforme diskretua

66. Denda bateko eguneko garbigailu salmentak banaketa uniforme diskretuaren araberakoak dira, 0-9 bitartean.

    (a) Kalkulatu egun batean 3 garbigailu edo gutxiago saltzeko probabilitatea.

    (b) Kalkulatu egun batean batez beste saltzen den garbigailu kopuruaren itxaropena eta bariantza.

    (c) Kalkulatu 4 egunetako salmenta kopuruen sekuentzia jakin bat suertatzeko probabilitatea (adibidez, 2,6,1,8). Sekuentzia horretako egun kopurua, maximoa eta minimoa adierazi.

    (d) Kalkulatu zenbatekoa den 4, 5 eta 6 egunetan, hurrenez hurren, saldutako garbigailu kopuru maximoa 8 izateko probabilitatea, aurreko sekuentzian bezala.

    (e) Dendako langileak egunero 7 garbigailu bakarrik kudea ditzake. Zenbatekoa da egun batean gutxienez lana burutu ezinik suertatzeko probabilitatea, 4 egunetan zehar?

    (f) Kalkulatu zenbatekoa den 4, 5 eta 6 egunetan, hurrenez hurren, saldutako garbigailu kopuru minimoa 1 izateko probabilitatea, aurreko atalean gertatzen den moduan.

    (g) Dendan egun batean dirua galdu dela uste da, 2 garbigailu edo gutxiago saldu direnean. Zenbatekoa da egun batean gutxienez galerak izateko probabilitatea, 4 egunetan zehar?

    (h) Zenbat egun behar dira salmenta maximoa 9 izan dadin 0.95eko probabilitateaz? Eta 9 edo txikiagoa izan dadin?

    (i) Zenbat egun behar dira salmenta maximoa 8 izan dadin 0.95eko probabilitateaz? Eta 8 edo handiagoa izan dadin?

    (j) Zenbaterainoko garbigailu salmentak beharko lirateke, betiere banaketa uniforme diskretuaren arabera, 4 egunetan zehar maximoa 15 edo txikiagoa izateko probabilitatea 0.95 izateko? Eta 8 egunetan zehar? (Soluzioa)

67. Ikastetxe bateko ikasle guztiak 1etik 222rako zenbakiak dituen zerrenda batean daude. Kalkulatu 26-36-67-197 lagina suertatzeko probabilitatea, zorizko laginketa sinpleaz, itzuleraz nahiz itzulerarik gabe. (Soluzioa)

68. Artista baten grabatuek zenbaki bana daramate. Berak egindako 4 grabatuetan zenbaki hauek ikusi ditugu: 10-34-23-8. Serie osoa zenbat grabatuk osatzen duten ez da ezaguna. Serie osoaren tamainaren estimazioa egin ezazu. 34ko maximoa 10 grabatuekin eskuratu izan balitz, nolakoa izango zen estimazioa? Zergatik da txikiagoa azken kasuan?

6.2 Banaketa uniforme jarraitua

69. Gai batek datorren urterako izango duen prezio igoera 0-10 puntu bitartekoa izango dela uste da, bestelako informaziorik gabe.
   (a) Zenbat da igoera 6 baino handiagoa izateko probabilitatea (arrazoituz nahiz kalkulua eginez)? Adierazi grafikoki probabilitate hori.
   (b) Otsailerako 2 puntuko igoera izan bada, zenbat da igoera urtearen amaieran 6 baino handiagoa izateko probabilitatea?
   (c) Zenbateko igoera espero da batez beste (arrazoituz nahiz kalkulatuz)?
   (d) Zenbat da prezio igoeraren bariantza? (Soluzioa)

70. $X \sim U(0, 8)$. Kalkulatu z, $P[X > \mu_X + z] = 0.1$. (Soluzioa)

71. Frogatu behar da balio batetik beherako baldintzapeko edo moztutako banaketa uniforme bat ere uniformeki banatzen dela. (Soluzioa)

72. Frogatu behar da, $Z(0, 1)$ banaketari $X = a + (b - a)Z$ aldagai-aldaketa aplikatuz gero, X zorizko aldagaia $U(a, b)$ banatzen dela.

73. Denda bateko eguneko salmentak 100-200 bitartekoak dira, baina horretaz gain erabateko ziurgabetasuna dugu.
   (a) Simulatu 4 eguneko salmentak.
   (b) Eman itzazu aurreko 4 eguneko segidetako salmenta maximoa, minimoa eta ibiltartea.
   (c) (a) eta (b) errepikatu 20 aldiz.
   (d) 4 egunetako salmenta maximoak, minimoak eta ibiltarteak irudikatu.
   (e) Grafikoak ikusita, gutxi gorabehera zein da maximo, minimo eta ibiltarte batezbestekoa?
   (f) Kalkulatu maximoaren, minimoaren eta ibiltartearen itxaropenak edo batezbesteko teorikoak.
   (g) Azaldu logikoki aurreko emaitzak, diagrama egokia eratuz.
   (h) Aurreratu eta kalkulatu 4 eguneko salmenta maximoa 140 baino txikiagoa izateko probabilitatea.
   (i) Aurreratu eta kalkulatu 4 eguneko salmenta minimoa 180 baino handiagoa izateko probabilitatea.
   (j) Aurreratu eta kalkulatu 4 eguneko salmenten ibiltartea 10 baino txikiagoa izateko probabilitatea. (Soluzioa)

74. Denda bateko eguneko salmentak 0tik b-ra doaz, b parametro ezezaguna izanik. b estimatzeko, n egunetako salmentak jaso, eta horien maximoa hartzen da. Adibidez, 23-86-176-158 suertatzen bada, $\hat{b} = 176$ estimatuko dugu. Badakigu noski, maximo hori beti ibiliko dela benetako b-ren azpitik, eta beraz halako errore sistematikoa duela. Baina kontrolatu egin daiteke.
   (a) Zenbateko errorea egiten dugu portzentajean eta batezbeste 7 eguneko datuen maximoa hartzen denean b estimazio moduan?
   (b) Zenbat eguneko datuak jaso behar dira batez besteko errore-portzentaje hori gutxienez %5era murriztu nahi denean?
   (c) Zer egin beharko genuke errore hori zuzentzeko?
   (d) 4 egunetan zehar 140ko maximoa suertatu eta salmentak 100-200 tartean banatzen badira uniformeki, arrazoirik ba al dago esateko salmenten b maximo absolutua 200 baino txikiagoa dela? $\alpha = 0.1$ (Soluzioa)

Errentak	Familiak
100-200	86
200-400	44
400-600	20
600-1000	14
1000-2000	6
2000-5000	2

7 Berretura-legeko banaketak

75. Herri bateko familien errentak jaso eta tartean bildu dira:
    (a) Errenta balioak eta haietatik gorako probabilitateak irudikatuz, azter ezazu berretura-legeko banaketa egokia den datu horietarako.
    (b) α parametroa estimatu behar da, zoriz aukeraturiko familia batzuen errenta zehatz hauek harturik: 122-134-148-168-186-254-386-875.
    (c) Kalkulatu hasierako taulako maiztasun teorikoak, arestian egindako estimazioarekin.
    (d) Itxaropen matematikoa batezbesteko aritmetikoarekin berdinduz, parametroaren estimazio berria egin ezazu, eta maiztasun teorikoak berriz ere kalkulatu.
    (e) Zein da estimazio doiena?
    (f) Estimazio doiena harturik, kalkulatu du zein errenta-portzentajea jasotzen duten familien %10 aberatsenak.
76. Azken hilabetean saldutako 10 liburu salduenen salmentak jaso dira:

Liburuak	Aleak
A	86
B	52
C	32
D	22
E	16

    (a) Aztertu Zipfen legea egokia izan daitekeen datu horietarako.
    (b) Zipfen legeko parametroaren bi estimazio eman eta erabaki zen den doiena.
    (c) Azken urtetotako best seller handiena jaso behar da berehala. Aurreko liburuen salmentek bere horretan jarraitu behar badute, zenbat ale salduko lituzke liburu berriak hurrengo hilabetean?

8 Banaketa normala

77. Hozkailu bateko tenperatura N(0,1) banaketa normal estandarraren arabera banatzen da. Kalkulatu probabilitate hauek taula nahiz R softwarea erabiliz:
    (a) $P[Z < 1.42]$
    (b) $P[Z < 3.98]$
    (c) $P[Z < 5.6]$
    (d) $P[Z > 2.75]$
    (e) $P[Z < -0.68]$
    (f) $P[Z > -1.02]$
    (g) $P[0.48 < Z < 1.92]$
    (h) $P[-1.24 < Z < -0.98]$
    (i) $P[-2.19 < Z < 0.55]$
    (j) Kalkulatu bere azpitik %95eko probabilitatea uzten duen banaketa normal estandarraren balioa.

(k) Kalkulatu bere gainetik %20ko probabilitatea uzten duen banaketa normal estandarraren balioa.

(l) Kalkulatu bere azpitik %10eko probabilitatea uzten duen banaketa normal estandarraren balioa.

78. Lantegi bateko E eguneko ekoizpena $N(68kg, 4kg)$ banatzen da.

(a) Kalkulatu $P[E < 77]$.

(b) Kalkulatu $P[E > 62]$.

(c) Kalkulatu $P[64 < E < 72]$.

(d) Kalkulatu egun guztietatik %99an betetzen den ekoizpen kopuru maximoa.

(e) Zenbateko ekoizpena ziurta daiteke 0.9 probabilitateaz?

(f) Egun batean 54 kiloko ekoizpena izan bada, batezbestekoa egun horretan jaitsi dela esan al daiteke?

79. Enpresa batek teknikari-lanposturako aurkezten diren hautagaiei egiten zaien proba bateko puntuazioa banaketa normalari jarraiki banatzen dela uste du, batezbestekoa 110 puntu eta desbideratzea 5 puntu izanik. Proba gainditzeko 120 puntu behar dira.

(a) Zenbat da proba gainditzeko probabilitatea?

(b) 95etik beherako puntuazioa duten hautagaiak baztertu egiten dira. Ehunekotan, zenbat dira hautagai hauek?

(c) Probaren bitartez hautagaien %30 baztertu nahi bada, zein puntuazio jarriko da proba gainditzeko?

(d) Azkenik, puntuazioari buruzko %90eko tarte karakteristikoa eratu ezazu.

80. Lantegi bateko eguneko ekoizpena banaketa normalari jarraiki banatzen da, batezbestekoa 8 tona eta desbideratzea 1 tona izanik.

(a) Zenbatekoa da lau egunetan 30 tona baino gutxiago ekoizteko probabilitatea?

(b) Zenbateko ekoizpena ziurta daiteke lau egunetarako %90eko probabilitateaz?

(c) Zenbat egun behar dira gutxienez 60 tonako eskaera bat burutzeko, eskaeraren epea ez betetzeko probabilitatea gehienez %15 izatea nahi bada?

(d) Eta %1 izatea nahi bada?

(e) Ordaindu beharreko T tributuak eguneko 12.000€ko kopuru finkoa dira alde batetik, 1000€ko kenkariarekin tona bakoitzeko. Zenbat da egun jakin bateko ekoizpenagatik 3.000€ baino gehiago ordaindu behar izateko probabilitatea? (Soluzioa)

81. Fakultateko igogailuan 12 pertsona sartzen dira eta gehienez 900 kg-ko pisua har dezake. Batez beste zenbat izan behar da pertsona baten batez besteko pisua, aipatutako zama gainditzeko probabilitatea 0.1 izan dadin? Pertsona baten pisuaren desbideratzea 10 kilo da. (Soluzioa)

82. *(Errepaso-problema)* Denda bateko eguneko salmentak banaketa gausstarraren araberakoak direla uste da, batezbestekoa 2000€ eta desbideratzea 400€ izanik.

(a) Irudikatu grafikoki banaketa eta bertan adierazi eguneko salmentak 1400€ baino txikiagoak izateko probabilitatea.

(b) Kalkulatu aurreko probabilitatea.

(c) Kalkulatu egun guztietatik %99an betetzen den salmenta minimoa. Idem %90eko portzentajearekin.

(d) Kalkulatu 4 egunetan 8200€ baino gutxiago saltzeko probabilitatea.

(e) Zenbat egun behar dira 30.000€-ko salmenta izateko gutxienez %95eko probabilitateaz?

(f) Egunean ordaindu beharreko zergak 200€ finko eta salmenten gaineko %10 dira. Zenbat da egun batean 420€ baino gutxiago ordaindu behar izateko probabilitatea?

8.1 De Moivre-Laplace teorema

83. Ekoizpen-prozesu batean unitate bakoitza akastuna izateko probabilitatea 0.25 da. 100 unitateko lote bat osatzen da.

(a) Zenbatekoa da horien artean 30 akastun edo gutxiago izateko probabilitatea?

(b) Zenbat akastun espero dira?

(c) Zenbatekoa da espero den akastun kopuru hori bera suertatzeko probabilitatea?

(d) Zenbat akastun ziurta daitezke %90eko probabilitateaz? (Soluzioa)

84. Enplegu publikoko eskaintza batera 1000 lagun aurkeztu dira. Lehenengo proba baztertzailea eta hura gainditzeko probabilitatea 0.6 da. Zenbat aulki prestatu behar dira bigarren probarako aulki nahikoa izateko probabilitatea 0.99 izatea nahi bada? (Soluzioa)

85. Eguneko ekoizpena xaboi-lantegi batean N(100 kilo, 10 kilo) banatzen da. Zenbat da urtean, 365 egunetatik, gutxienez 317tan 110 kiloko ekoizpena ez gainditzeko probabilitatea? (Soluzioa)

8.2 Poisson banaketaren hurbilketa normala

86. Makina batean gertatzen den matxura kopurua eguneko 0.16 da batez beste Poissonen prozesu bati jarraiki. Matxurak konpontzeko pieza bana behar da aldi bakoitzean.

    (a) Zenbat da 360 egunetan zehar 50 pieza baino gehiago behar izateko probabilitatea?

    (b) Zenbat pieza behar dira 360 egunetako matxurak konpontzeko nahikoa izateko probabilitatea 0.99 izan dadin?

    (c) 100 piezarekin zenbat egunetarako daukagu nahikoa 0.99ko probabilitateaz? (Soluzioa)

87. Poisson banaketari jarraiki 1.4 bateria gastatzen da batez beste eguneko lantegi batean.

    (a) 40 egunetan, zenbat da 50 bateria baino gehiago gastatzeko probabilitatea?

    (b) Zenbat bateria eduki behar dira prest 80 egunetarako nahikoa izateko probabilitatea 0.98 izan dadin?

    (c) Zenbat izan behar da bateria baten batezbesteko iraupena, 40 bateriarekin 60 egunetarako energia nahikoa izateko probabilitatea 0.9 izan dadin? (Soluzioa)

9 Limitearen teorema zentrala

88. Lantegi batean egun batean kontsumitzen den substantzia baten kopurua uniformeki banatzen da 5 litro - 10 litro tartean.

    (a) Zenbatekoa da 40 egunetan zehar 420 litro baino gutxiago behar izateko probabilitatea?

    (b) Zenbat litro behar dira erosi 40 egunetarako nahikoa izateko probabilitatea 0.99 baino handiagoa izan dadin?

    (c) Idem, egun bateko kontsumoaren banaketa U(0,15) izanik.

    (d) 500 litrorekin, zenbat egunetarako daukagu nahikoa 0.99ko probabilitateaz?

89. Finantza inbertsio batek duen eguneko kotizazioak +1, 0 eta -1€ egin dezake 0.2, 0.5 eta 0.3 probabilitateaz, hurrenik hurren.

    (a) 100 egun igaro ondoren, zenbat da mozkinak izateko probabilitatea?

    (b) Zenbat diru eduki behar da prestatuta 100 egunetara gerta daitezkeen galerei aurre egin ahal izateko probabilitatea 0.99 izan dadin? (Soluzioa)

90. Poissonen banaketari jarraiki 1.4 bateria gastatzen da batez beste eguneko lantegi batean.

    (a) 40 bateria edukita, zenbat denboratarako daukate energia nahikoa 0.99ko probabilitateaz?

    (b) Zenbat bateria prestatu behar dira 80 egunetarako energia nahikoa izateko probabilitatea 0.98 izan dadin?

    (c) Zenbat izan behar da bateria baten batezbesteko iraupena, 40 bateriarekin 60 egunetarako energia nahikoa izateko probabilitatea 0.9 izan dadin?

    Oharra: Ebazpena banaketa esponentziala baliatuz egin behar da. (Soluzioa)

91. Lantegi batean batez besteko ekoizpena 146 tona da, 10 tonako desbideratzearekin, banaketa zehatza ezezaguna izanik, astelehenetik ostegunera; ostiral eta larunbatetan, goizeko txandan bakarrik egin da lana eta batez besteko ekoizpena 64 tonakoa da, 6ko desbideratzearekin.

    (a) Hurrengo 10 asteetan 7200 tona baino gehiago ekoizteko probabilitatea kalkulatu behar da.

    (b) Zenbat aste osoko epea eman behar da 8000 tonako eskaera bat ekoitzi ahal izateko 0.96ko probabilitateaz? (Soluzioa)

92. Makina bakoitzeko matxura kopurua 0, 1 edo 2 izan daiteke 0.2, 0.5 eta 0.3ko probabilitateaz, hurrenik hurren, gertatzen direla uste da. Haiek gutxitu nahian, mantentze-plan bati ekin zaio eta horren ondoren lantegi bateko 100 makinetan 90 matxura jaso direla ikusi da. Mantentze-plana eraginkorra izan dela esan al daiteke? Adierazgarritasun-maila :%2. (Soluzioa)

93. Eguneko ekoizpena lantegi batean uniformeki banatzen da 10-20 tartean, kg-tan. 50 egunetan zehar, batezbesteko ekoizpena 14 izan da.
    (a) Ekoizpena jaitsi egin dela esan al daiteke? Adierazgarritasun-maila : %2.
    (b) Zenbat izan behar da batezbestekoa ekoizpena jaitsi dela baieztatzeko? Adierazgarritasun - maila : %2.
    (c) Kalkulatu hipotesi nulua baztertzeko balio kritikoak 100 eta 500 lagin tamainetarako, eta emaitzak interpretatu.
    (d) Zenbat izan behar da 50 datuen batezbestekoa, ekoizpen orokorra ($\mu = 15$) aldatu dela, besterik gabe, baieztatu ahal izateko? Adierazgarritasun - maila : %2. (Soluzioa)

94. Produktu bat bere bizitza-zikloaren hazkunde-fasean dago. Hileko salmentak hurrengo hilabetetik aurrera honela banatzen direla uste da: $U(800 + 200i, 1800 + 200i)$, i izanik hemendik aurrerako hilabetearen zenbakia.
    (a) Kalkulatu hurrengo hiru hilabeetako bakoitzean salmenten itxaropena eta salmentak 1600€ baino handiagoak izateko probabilitatea? Interpretatu ezazu salmenten hazkundeari buruz.
    (b) Zenbat da hurrengo hiru urteetan 180.000€ baino gutxiago irabazteko probabilitatea? (Soluzioa)

10 Balidazioa

10.1 Ereduaren doitasuna: khi-karratu proba

95. Jogurt berri baterako lau aukera eman zaie dastatzeko 60 bezero potentzialeko talde bati eta lauetatik zein nahiago duten galdetu zaie. A, B, C eta D aukerak nahiago izan dituztenak 20, 14, 12 eta 14 dira, hurrenik hurren. Lau aukerak berdintsuak edo probabilitate berekoak direla baiezta al daiteke %10eko adierazgarritasun-maila batez? (Soluzioa)

96. 100 egunetan zehar egunero gertatzen den matxura kopuruak jaso dira (datu gordinak 0, 0, ..., 1, ... izango lirateke):

Matxura kopurua	0	1	2	3	> 3
Egun kopurua	21	19	15	20	25

    Khi-karratu probaren bitartez, Poisson eredua datu horietarako egokia dela esan al daiteke adierazgarritasun maila %10 izanik? (Soluzioa)

97. Ikasle talde bati matematika-test bat proposatu zaie. Izandako puntuazioak aldagai jarraitu bati dagozkionez, maiztasunak eskuratzeko tarteka bildu dira:

Puntuazioa	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
Ikasleak	2	14	34	38	12

    %10eko adierazgarritasun mailaz datuetara banaketa normala doi egokitzen den erabaki behar da. (Soluzioa)

98. Enpresa batek menuak zerbitzatzen ditu astelehenetik ostiralera eguerdiz nahiz arratsean. Zerbitzatutako menuen kopuruak dira hauek:

Menuak	Astelehena	Asteartea	Asteazkena	Osteguna	Ostirala	Guztira
Eguerdiz	38	45	38	58	40	219
Arratsean	18	31	26	30	36	141
Guztira	56	76	64	88	76	360

    Astelehenetik ostiralera bezeroen bertaratzea uniformea den erabaki behar da, khi-karratu kontrastea baliatuz. Era berean, eguerdiz arratsean bi halako menu zerbitzatzen diren ere egiaztatu nahi da. Adierazgarritasun-maila: %5.

99. Denda bateko salmentak jaso dira azken 30 egunetan zehar (milaka eurotan):

    68 26 28 54 46 62 59 43 23 27
    15 10 66 79 92 101 81 10 86 10
    15 90 84 24 47 40 40 32 19 87

    Salmenten batezbestekoa 48.8 da.

    Egin beharreko atazak:

(a) Marraztu histograma bat, 20 zabalerako tarteak osatuz, eta 100-110 tartearekin bukatuz (oharra: tarte zabalera desberdina izan arren, maiztasun absolutuak harturik eratu eratu).

(b) Histograma ikusita, probabilitate-eredu bat suposatu datu horietarako.

(c) $U(0,b)$ eredua harturik, b parametroa estimatzeko bi zenbatesle edo estimatzaile hauek proposatzen zaizkizu: (1) populazio batezbestekotik eratortzen den zenbatesle naturala; (2) datu handiena bider 1.05. Zenbatesleak notazio zuzenarekin adierazi eta erabaki zein den egokiena datu horietarako.

(d) datuak biltzeko 20 zabalerako tarteak osatuz, eta 100-$\hat{b}$ tartearekin bukatuz, khi-karratu proba garatu eta dagokion erabakia hartu.

100. Makina batean geldialdi bat izan arteko denborak jaso dira:

$26.2 - 22.3 - 33.5 - 19.0 - 24.7 - 25.6 - 26.2 - 28.9 - 27.6 - 26.5 - 30.2$

$27.1 - 32.4 - 36.2 - 34.1 - 28.7 - 26.5 - 25.4 - 23.4 - 21.6 - 22.0 - 20.6$

$0-10$, $10-20$, $20-30$, $30-40$ eta >40 tarteak baliatuz, datuak banaketa esponentzialera egokitzen diren erabaki ezazu khi-karratu kontrastea baliatuz, horretarako ereduaren batezbestekoa datuen batezbestekoaren bitartez estimatuz. Adierazgarritasun-maila: %10. (Soluzioa)

10.2 Zorizkotasuna eta independentzia: bolada-proba

101. Akzio baten kotizazio-aldaketak jaso dira egun batzuetan zehar:

$$\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow$$

Kotizazio-aldaketa horiek zoriz eta independentziaz gertatzen al dira? Bolada-proba garatu erabakia hartzeko. Adierazgarritasun-maila: %5.

102. Zorizko lagin independente moduan erabili ahal izateko, egun zenbaitetako ekoizpenak jaso dira lantegi batean. Jaso diren ordenan adierazten dira:

$34.6 - 26.2 - 31.0 - 28.7 - 29.5 - 33.4 - 35.6 - 27.2 - 30.8 - 28.9$

$36.1 - 27.5 - 34.5 - 29.7 - 35.6 - 32.8 - 28.8 - 32.3 - 27.2$

Bolada-proba baliatuz, datuak independentziaz jaso diren erabaki. Adierazgarritasun-maila: %5.

103. Ekoiztu ahala, piezak akasgabeak edo akastunak diren jaso da ekoizpen-prozesu batean. Datuak ekoizpen ordenan adierazten dira:

$$OOOOOXXOXXXOOOOXOOOOOOOOXXXOOXOXOOOOOOOXOOOOXXX$$

Prozesua independentziaz garatu eta pieza horiek zorizko lagin bat osatzen duten egiaztatu bolada-proba erabiliz. Adierazgarritasun-maila: %10.

10.3 Homogeneotasuna: Wilcoxon hein-proba

104. Selektibitateko azterketa batean bi zuzentzailek jarritako kalifikazio zenbait jaso dira:

A zuzentzailea	B zuzentzailea
5.4	6.5
6.2	7.4
8.7	4.7
9.5	5.6
7.6	5.4
8.2	8.6
3.5	7.2
7.8	

Wilcoxonen hein proba baliatuz, batera jarri al daitezke bi zuzentzaileen kalifikazioak inferentziak egiterakoan? Adierazgarritasun-maila: %5.

105. Denda batean hainbat gizon eta emakumek egindako erosketen zenbatekoak jaso dira:

$Gizonak: 3, 3, 5, 6, 8, 10, 10, 11, 11, 12, 12, 12, 16, 19, 20$

$Emakumeak: 2, 7, 9, 11, 13, 13, 15, 17, 17, 18, 20, 21, 23, 24, 25, 25, 27, 32, 36, 39$

Wilcoxonen hein proba baliatuz, batera jarri al daitezke gizon eta emakumeen datuak inferentziak egiterakoan? Adierazgarritasun-maila: %5. Oharra: banaketa normalaren hurbilketa erabil itzazu, eta p-balioaren nahiz eremu kritikoaren metodoen bitartez ebatzi. (Soluzioa)

106. Matematikan arazoak zituzten haur zenbait programa berezi batean aritu dira azken urtean. Aurretik eta ondoren matematika proba bat egin zitzaien. Emaitzak honako hauek dira:

 Iaz: 22,32,43,28,27,36

 Aurten: 25,42,50,35,35,42

 Programa arrakastatsua izan den erabaki Wilcoxon heinen proba baliatuz. Adierazgarritasun-maila: %5. Oharra: iazko eta aurtengo haurrak ezberdinak dira (beraz, lagin independenteak ditugu). Haur berdinei buruzko datuak balira, laginak binakatuak alegia, dependenteak lirateke eta beste proba mota bat garatu beharko litzateke (zeinuen proba, esaterako). (Soluzioa)

107. Larunbat eta igandeetan saldutako sarrerak jaso dira zinema batean asteburu batzuetan zehar:

 Larunbatak: 126-91-68-122-113-137-111-86-100-82-96-121-97-95-89

 Igandeak: 81-98-129-101-121-124-133-108-84-89-86-131

 Igandeetan sarrera gehiago saltzen diren probatu behar da, Wilcoxon probaren bitartez, adierazgarritasun-maila %1 harturik. Oharra: taulen ordez, banaketa normalaren hurbilketa erabil ezazu. (Soluzioa)

11 Estimatzaileen lagin-banaketak

108. Demagun gela batean 4 neska eta 6 mutil daudela. 2 tamainako zorizko lagin sinplea aukeratzen da.

 (a) Lagin posible guztiak eman, beren probabilitateekin batera.

 (b) Mutilen proportzioaren lagin-banaketa eman ezazu eta horren batezbestekoa eta bariantza.

 (Soluzioa)

109. Populazio bat elementu hauek osatzen dute: 1-2-3. $n = 3$ tamainako zorizko laginketa itzuleraduna eginez:

 (a) Zer eta zenbat da μ? Hemen ezaguna al da, baino, hala izaten al da praktikan?

 (b) Lagin posible guztiak eman, bere probabilitaeekin batera.

 (c) Lagin-batezbestekoaren lagin-banaketa eman.

 (d) Zenbat da lagin batezbestekoaren zenbatespen edo estimazioarekin populazio batezbestekoaren balioa zehaztasun osoz, errorerik gabe, estimatzeko probabilitatea?

 (e) Lagin batezbestekoaren itxaropena edo batezbestekoa eman eta interpretatu ezazu, lagin batezbestekoa zenbatesle edo estimatzaile egokia izateari buruz.

110. 6 familiak osatutako populazio batean kide kopurua interesatzen zaigu. Honako hau da populazioaren zentsua:

Familiaren identifikazioa	Kide kopurua
a	5
b	7
c	6
d	4
e	5
f	3

 Bi tamainako zorizko laginak erauzi behar dira, ondoko estimatzaileak kalkulatzeko:

 (a) Lagin-batezbestekoa, populazio-batezbestekoa estimatzeko.

 (b) 6 kide edo gehiagoko familien proportzioa, populazioan proportzio bera estimatzeko.

 (c) Totala bider 3, totala izanik zenbat kide dauden guztira bi familien artean, eta 3 izanik populazioaren tamaina laginarekiko (3 bider handiagoa), populazioko kide kopurua estimatzeko.

 (1) Hiru estimatzaileen lagin-banaketak eman; (2) parametroen balioak zehatz, errorerik gabe, estimatzeko probabilitateak eman, (3) eta estimatzaileak zentratuak edo alboragabeak diren adierazi.

12 Proba parametrikoak

12.1 Batezbestekoari buruzko probak

111. Denda bateko eguneko salmentak banaketa normalari jarraiki banatzen dira, 100eko desbideratzeaz. Ohiko egun batean salmentak 1000 dira batez beste. 10 egunetan batez besteko salmenta 1100 izan da. Batezbestekoa igo dela baiezta al daiteke? Ebatzi p-balioaren zein eremu kritikoaren bitartez. Adierazgarritasun-maila: %5.

112. Populazio normal batean datu hauek jaso dira: 22-26-24-24-25-23.

    (a) Populazio batezbestekoa 22 delako hipotesia frogatu behar da. Adierazgarritasun-maila: %10.

    (b) Bidenabar, bestelako kalkulurik gabe, beste zeintzuk hipotesi baztertu edo onartu behar dira?

    (c) 8 datu hartuta, lagin batezbestekoa 28 suertatu da, eta lagin bariantza 2. Populazio batezbestekoa igo dela baieztatzeko arrazoirik ba al dago? Adierazgarritasun-maila: %1.

113. Hegaldi baten batez besteko iraupena 300 minutukoa dela ezarri da hipotesi nulutzat. Iraupenen desbideratzea 40 minutukoa dela dakigu, baina banaketa ezin da zehaztu. 100 hegaldiren batezbestekoa 310 minutu suertatu da. Froga ebatzi p-balioaz zein eremu kritikoaz. Adierazgarritasun-maila: %5.

114. Ustez banaketa esponentzialaz banatzen diren 50 iraupen-denbora jaso dira. Normalean batez besteko iraupena 100 minutu da. Batez besteko iraupena jaitsi ote den erabakitzeko froga estatistikoa diseinatu. Adierazgarritasun-maila: %5.

115. 80 familien ur-kontsumoak jaso dira: $\overline{x} = 7$; $\sum x_i^2 = 4800$. Kontsumoak gamma izeneko banaketa baten araberakoak dira, eta hari buruz batezbestekoa eta bariantza ez ditugu ezagutzen.

    (a) Erabaki p-balioaz populazioaren batezbestekoa 7.5 edo handiagoa izan daitekeen. Adierazgarritasun-maila: %1.

    (b) Erabaki orain batezbestekoa 7.5 baino txikiagoa izan daitekeen. Adierazgarritasun-maila: %1.

116. Osagai baten iraupena normal banatzen da, desbideratzea 4 egun izanik. Kalitate-betebeharrek batez besteko iraupena gutxienez 10 egunekoa izatea eskatzen dute. 9 daturen batezbestekoa 8 suertatu da. Betebeharra betetzen den (edo ez) erabaki. Adierazgarritasun-maila: %1.

117. Makina baten ekoizpena orduko 40 unitatekoa izaten da batez beste eta banaketa normalaren araberakoa dela uste da. Datuak independenteak izan daitezen, aste ezberdinetako 4 ordutako ekoizpenak jaso dira: 38-39-35-36. Zer erabaki behar duzu datu horiek hartuta batezbesteko orduko ekoizpenari buruz? Adierazgarritasun-maila: %5.

118. (a) Lantoki batean ekoitzitako burniaren kalitate estandarrak erresistentziak $100kg/cm^2$ izan behar duela ezartzen du. Independentziaz jasotako 8 lotetan burni laginak jaso eta erresistentzia datu hauek jaso dira:

$$99 - 98 - 96 - 102 - 101 - 100 - 95 - 96$$

    Susmoa dago estandarra ez dela betetzen batezbestekoari buruz. Burutu ezazu proba bat horri buruz erabaki bat hartzeko.
    (b) Beste alde batetik, burniaren beste ezaugarri bat dugu: malgutasuna. kalitate estandarrek ezartzen dute malgutasuna zehazki 200 unitatekoa izan behar dela batezbeste (burni zurruna puskatu egiten da, eta malguegia denean gehiegi okertzen da), 10 unitateko desbideratze estandar batekin. Estandarra betetzen den erabakitzeko probari dagokion erabaki erregela eman behar da.

12.2 Proportzioari buruzko probak

119. Merkatu bateko kontsumitzaileen %26ak ziren enpresa bateko bezeroak iaz. Aurten zoriz aukeraturiko 200 kontsumitzaileen artean 44k bezero izaten jarraitzen dutela adierazi dute. Aurtengo datuekin erabaki bat hartu iazko proportzioaren bilakaerari buruz. Adierazgarritasun-maila: %5. Froga p-balioaren metodoa nahiz balio kritikoaren metodoa baliatuz burutu behar da.

120. Hornitzaile batek pieza guztietatik akastunak gehienez %4 direla baieztatzen du. Susmoak ditugu hori ez dela horrela. Gure susmoak frogatzeko, 200 pieza zoriz aukeratu eta aztertzen dira. Adierazgarritasun-maila %10 izanik, zenbat pieza izan behar dira akastun hornitzaileak dioena baztertzeko? (Hau da, balio kritikoa kalkulatu froga diseinatzeko) Eta %5 bada? eta %1 bada? Osatu taula bat emaitzetatik eta atera ezazu ondorioren bat.

12.3 Bariantzari buruzko probak

121. Populazio normal batean, 10 datu jaso eta lagin bariantza (zuzendu gabea) 36 suertatu da. Populazioaren desbideratze estandarra 5 edo txikiagoa delako hipotesia frogatu behar da. Adierazgarritasun-maila: 0.01

122. Marka bateko 2 pilula probiotikoetan dauden *L. acidophilus* mikroorganismoen kopuruak jaso dira, ehunka miliotan: 2.2, 4.2. Kalitate-betebeharrek kopuru horren bariantza 2 baino txikiagoa izan behar dela ezartzen dute, besteak beste. Baldintza betetzen al da? Adierazgarritasun-maila: 0.10.

13 Konfiantza-tarteak

13.1 Batezbestekoari buruzko tarteak

123. Autobus batek ibilbide bat egiteko behar duen denbora jaso da zenbait bidaietan zehar (minututan):

$$12 - 11 - 13 - 16 - 18 - 20 - 10 - 14$$

Denbora hauek banaketa normalaren araberakoak direla suposatu da, balidazio fasean frogatzearen erreserbapean.

(a) Batezbestekoa eta desbideratze estandarra zenbatetsi. Zenbatespen onak al dira?

(b) Populazio-batezbestekoaren %90eko konfiantza-tartea eratu behar da

(c) Idem, %99ko konfiantzaz.

124. Eguneko salmentak jaso dira 10 astelehenetan zehar denda batean. Batezbestekoa 282 eta desbideratze estandar zuzendua 32 euro suertatu dira. Populazioa normala dela uste da.

(a) Zergatik uste duzu asteleheneko salmentak soilik aztertzen direla?

(b) Populazio-batezbestekoaren %95eko konfiantza-tartea eratu behar da.

(c) Emaitzak 10 daturekin ez, baizik eta 20rekin eskuratu izan balira, nolakoa izango zen tartea? Interpreta ezazu emaitza.

(d) Eta desbideratzea (10 daturekin) 44 suertatu izan balitz? Interpreta ezazu emaitza.

125. Makina batek ekoizten duen pieza kopurua jaso da ordu zenbaitetan:

$$56 - 44 - 48 - 52 - 60$$

(a) Banaketa normala suposatuz, %90eko konfiantza-tarte simetrikoa eratu populazio-batezbestekoari buruz.

(b) Makinaren saltzaileak eratuko lukeen %90eko tartea kalkula ezazu.

(c) Ekoizpen-zuzendariak eratuko lukeen %95eko tartea kalkula ezazu.

126. Populazio-normal batetik 86 unitateko lagina erauzi eta lagin batezbestekoaren emaitza 144 unitatekoa izan da. Lagin-bariantza 121 suertatu da. %98ko konfiantza-tarte simetrikoa eratu behar da.

127. 10 egunetako ekoizpenak (kilotan) jaso dira zoriz. Emaitza hauek eskuratu dira:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 108 \; ; \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 1234$$

(a) Populazio batezbestekorako puntu-zenbatespena eman eta %99ko konfiantza-tarte simetrikoa eratu.

(b) Baiezta al daiteke %90eko konfiantzaz eguneko batez besteko ekoizpena 10 baino handiagoa izan zela?

13.2 Proportzioari buruzko tarteak

128. 1000 piezatik 120 pieza akastun suertatu dira.

(a) Akastunen populazio-proportzioari buruzko %90 eta %99ko tarteak osatu behar dira.

(b) Nola aldatzen da %90eko tartea 10.000 piezatik 1200 akastun suertatu badira? Zergatik?

129. 256 piezatik 16 akastun suertatu dira makina batean.

(a) Zenbateko errorea dago populazio-proportzioaren zenbatespenean %80ko konfiantzaz?

(b) Nolako tartea eratuko luke makinaren saltzaileak konfiantza berdinarekin?

(c) Eta bezeroak saltzaileari erreklamazioa aurkezterakoan?

130. Substantzia baten edukia jaso da enpresa batean ekoizten den produktu bateko zenbait lotetan (mg/litro):

22.0 – 17.7 – 23.0 – 22.7 – 21.5 – 20.6 – 16.2 – 28.7 – 27.4 – 15.6 – 28.4 – 20.1 – 17.1 – 19.5 – 18.6
24.0 – 22.6 – 22.9 – 24.5 – 25.4 – 24.4 – 20.7 – 14.6 – 18.3 – 23.6 – 20.5 – 24.8 – 22.9 – 23.4 – 25.2
24.6 – 24.4 – 26.0 – 26.8 – 21.2 – 13.4 – 20.2 – 17.4 – 25.4 – 23.6

Lotean edukia 25.5 mg/litro-tik gorakoa denean, baztertu egiten da.

(a) Baztertzen diren loteen zenbatespen bat egin eta dagokion errorearen neurria %96ko konfiantzaz. Ondoriozko tarte simetrikoa osatu eta interpretatu.

(b) Kalitate oneko loteak ekoizten direla frogatze aldera konfiantza berdinarekin eratu beharreko tartea eman ezazu.

131. Hauteskunde batean X alderdiari botoa emango diotenen proportzioa zenbatetsi nahi da %90eko konfiantzaz, ±%2-ko erroreaz.

(a) Zenbat pertsonari galdetu behar zaio horretarako? Lagin-tamaina handiena kalkulatu, ezkortasunez.

(b) Nola aldatzen da lagin-tamaina errorea ±%1-era aldatzen bada? Lagin-tamaina handiena kalkulatu, ezkortasunez.

(c) %1eko errorearen kasuan X alderdiari botoa emango dioten pertsonak 2000 badira azkenik, osatu dagokion konfiantza-tartea.

132. Zenbat pieza aztertu behar dira akastunen populazio proportzioa gehienezko %4ko errore batez zenbatesteko %99ko konfiantzaz, aurrez lagin piloto batean 100 piezetatik 22 akastun suertatu badira? Eta konfiantza %90 izatea nahi bada?

13.3 Estimatzaileen propietateak

133. Eredu zehatzik finkatu gabe, populazio batezbestekoa estimatzaile honen bitartez estimatu nahi da:

$$\hat{\mu} = \frac{x_1 + 4x_2 + x_3}{5}$$

Estimatzaileren alboragabetasuna aztertu behar da. Alboratua izateko, alborapenaren magnitudea eta norabidea adierazi behar dira.

134. Negutegi bateko tenperaturari buruz ez da eredurik finkatu. Batezbestekoaren estimatzaile hau proposatu da:

$$\hat{\mu} = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n}{k}$$

Zenbatekoa izan behat da k estimatzailea alboragabea izan dadin?

135. Eredu aske batean populazio batezbestekoaren estimatzaile gisa honako hau proposatu da:

$$\hat{\mu} = k\frac{x_1 + x_2}{2} - k$$

Finka al daiteke k baliorik estimatzaile alboragabea izan dadin?

136. Eredu esponentzial bateko λ parametroa estimatu nahi da batezbesteko aritmetikoaren bitartez.

(a) Alboragabea al da?

(b) Alboratua izatekotan, norako alborapena dago?

(c) Alboragabea al da banaketa esponentzialaren batezbestekoari buruz?

137. Kontu batean dagoen diru kopurua honela banatzen dela uste da:

$$f(x) = \frac{2x}{\theta^2};\ 0 < x < \theta$$

θ parametroari buruz estimatzaile hau proposatu da:

$$\hat{\theta} = m\overline{x}$$

x	p(x)
$-\theta$	$\theta/2$
0	$1-\theta$
θ	$\theta/2$

138. Aldagai baterako eredu hau finkatu da:

   θ parametroaren estimatzaile gisa honako planteatu da: $\hat{\theta} = max(x_1, x_2)$. Aztertu bere alboragabetasuna.

139. Izotz kamara bateko tenperatura une batean erabat zorizkoa da $[-\theta, 0]$ tartean. Tenperatura minimoa estimatzeko zoriz eta independentziaz 10 datu jaso, eta estimatzaile hau kalkulatu behar da: $1.1min(x_i)$. Aztertu estimatzailearen alborapena.

140. Aztertu lagin batezbestekoaren zehaztasuna lagin-tamaina ezberdinetarako.

141. Eredu aske batean, populazio batezbestekoaren estimatzaile gisa honako estimatzaile hau proposatu da:

$$\hat{\mu} = \frac{\alpha x_1 + x_2}{\alpha + 1}$$

   Aztertu estimatzailearen zehaztasuna α balioen arabera.

142. Populazio-batezbesteko bat estimatzeko bi estimatzaile hauek proposatu dira:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{x_1 + 4x_2}{5}$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{2x_1 + 3x_2}{5}$$

   Aztertu zein den estimatzaile doiena.

143. Ilara baterako etorrerak Poisson legearen arabera gertatzen direla uste da. λ parametroa estimatzeko hiru estimatzaile hauen doitasuna azter behar da:

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{x_1 + x_2}{3}$$

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{x_1}{2}$$

$$\hat{\lambda}_3 = \frac{x_1 + x_2 + 4}{3}$$

   Orain, aztertu bi estimatzaile hauen doitasuna:

$$\hat{\lambda}_4 = \frac{x_1 + 4x_2 + x_3}{6}$$

$$\hat{\lambda}_5 = \frac{2x_1 + x_2 + x_3}{8}$$

144. Egunean lantegi batean galtzen den substantzia baten kantitatea uniformeki banatzen da $[0, \theta]$ tartean. Honako bi estimatzaile hauen doitasuna aztertu behar da:

$$\hat{\theta}_1 = x_1 + x_2$$

$$\hat{\theta}_1 = \frac{3}{4}(x_1 + x_2)$$

145. Eredu aske batean populazio-batezbestekoaren bi estimatzaile hauek proposatu dira:

$$m\hat{u}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n-1}$$

$$m\hat{u}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n+1}$$

   Aztertu bi estimatzaileen doitasuna.

146. Aztertu $\hat{\mu} = k\overline{x}$ estimatzailearen doitasuna k konstantearen arabera.

GIZAPEDIA
gizapedia.hirusta.io

ESTATISTIKA ENPRESARA APLIKATUA

ARIKETEN EBAZPENAK

Egilea: Josemari Sarasola

$\boxed{\text{[1ab] ariketa}}$

Analitikoki:

$$P[X = x] = \begin{cases} & x = 0, 1, 2, 3, 4 \\ & x = 5, 6, 7, 8, 9 \end{cases}$$

Taula moduan:

x	$P[X = x]$	$F(x) = P[X \leq x]$
0		
1		
	$\sum p(x_i) = 1$	

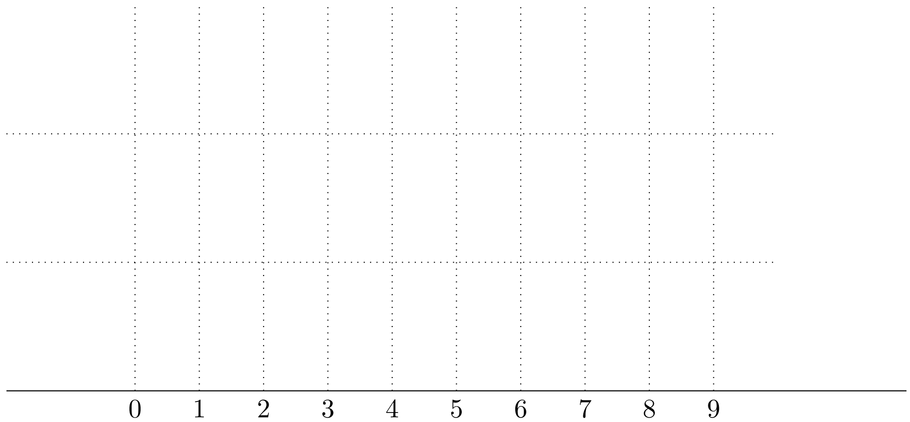
$\boxed{\text{[1c] ariketa}}$

Proba eginez ebatziko dugu.

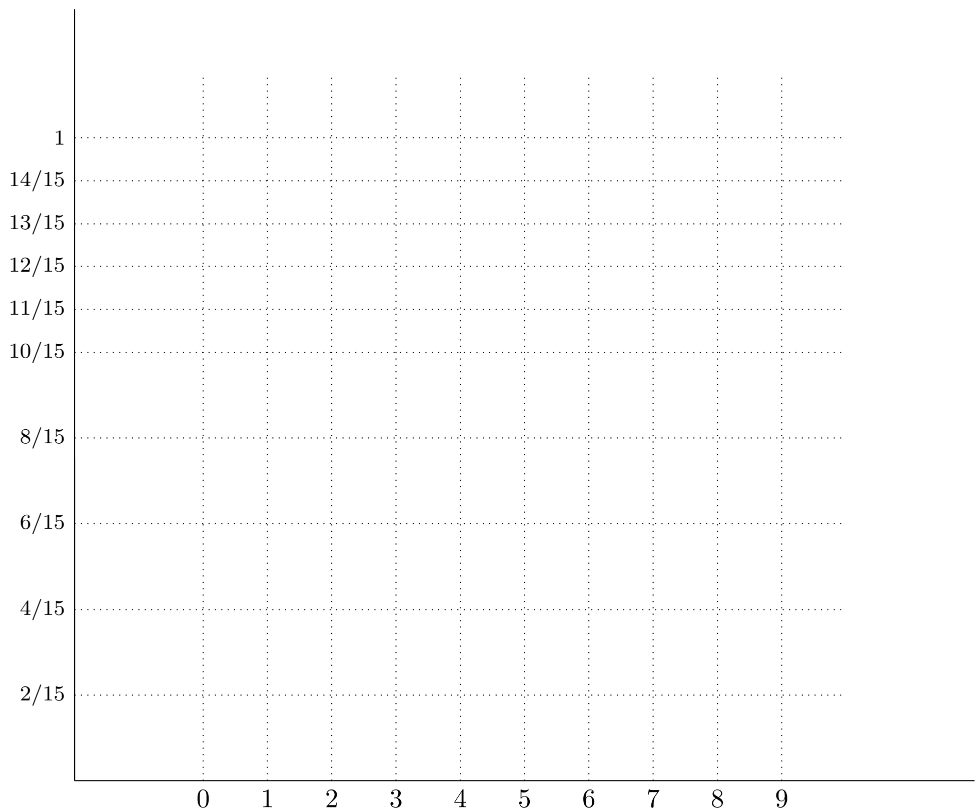
Esaterako, 3 pieza edukita, zenbatekoa da matxura guztiak konpontzeko probabilitatea?

[1d] ariketa

Probabilitate-funtzioa



Banaketa-funtzioa:



[2.] Bezero berri bat lortu arte egin behar den bisita kopurua honela banatzen dela uste da:

$$P[X = x] = 0.1 + \frac{k}{x} \;\; ; \;\; x = 1, 2, 3, 4$$

(a) Zenbatekoa izan behar da k probabilitate-funtzioa izateko?

(b) Probabilitate-funtzioa eta banaketa funtzioa taula moduan adierazi.

(a) Probabilitateen batura 1 izan behar denez:

$$P[X = 1] + P[X = 2] + P[X = 3] + P[X = 4] = 0.1 + \frac{k}{1} + 0.1 + \frac{k}{2} + 0.1 + \frac{k}{3} + 0.1 + \frac{k}{4} = 0.4 + \frac{25k}{12} = 1 \rightarrow k = 0.288$$

(b)

x	$P[X = x]$	$F(x) = P[X \leq x]$
1	$0.1 + \frac{0.288}{1} = 0.388$	0.388
2	$0.1 + \frac{0.288}{2} = 0.244$	$0.388 + 0.244 = 0.632$
3	$0.1 + \frac{0.096}{2} = 0.196$	$0.632 + 0.196 = 0.828$
4	$0.1 + \frac{0.288}{4} = 0.172$	$0.828 + 0.172 = 1.000$
	$\sum p(x_i) = 1$	

- Lehen zutabea zorizko aldagaia da.
- Bigarren zutabean probabilitate funtzioa dugu.
- Banaketa funtzioa hirugarren zutabean zehazten da.
- Taula osoa probabilitate banaketa da.

[3.] X zorizko aldagaia honela banatzen dela uste da:

$$P[X = x] = \frac{1}{k} \ ; \ x = 1, 2, \ldots, k$$

Zenbatekoa izan behar da k probabilitate-funtzioa izateko?

Probabilitateen batura 1 da (ohartu x ordeztuta, probabilitatea konstantea dela: $\frac{1}{k}$), hain zuzen.

$$P[X = 1] + P[X = 2] + \cdots + P[X = k] = \underbrace{\frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \cdots + \frac{1}{k}}_{\text{k aldiz}} = k \times \frac{1}{k} = 1$$

Berdintasuna k guztietarako betetzen denez (ohartu k ezin dela bakandu), k parametroa dela esango dugu, hau da, k nahi duguna izan daiteke.

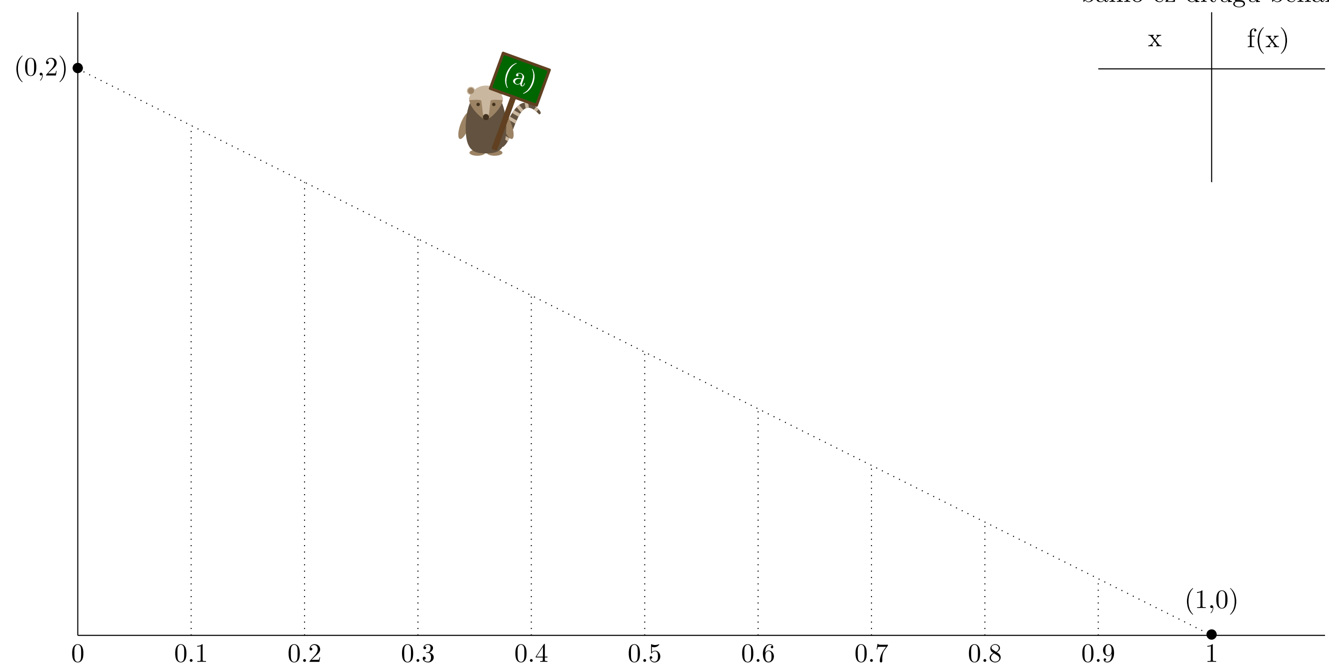
Parametro kontzeptua oso garrantzitsua da estatistikan, helburua horien balio ezezaguna estimatu edo haien balio zehatz bat frogatzea izaten baita. Horretarako datuak erabiltzen dira, haiei inferentzia metodoak aplikatuz.

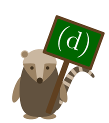
5. ariketa

Dentsitate-funtzioa: $f(x) = 2 - 2x \;; 0 < x < 1$

Dentsitate-funtzioa zuzena denez, hura irudikatzeko bi puntu baino ez ditugu behar.

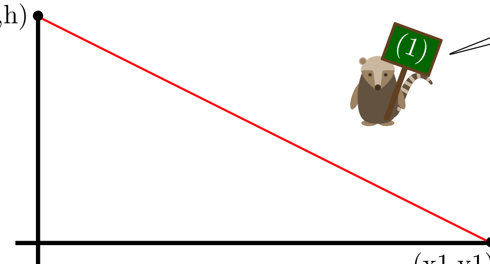
x	f(x)





6. ariketa

Kaixo, Koati naiz, zure estatistikako laguna.
Dentsitate funtzioa zuzen erakoa da;
hura zehazteko



Badakigu kurba azpiko azalera

eta triangelu baten azalera $bh/2$ dela.

Beraz, $\dfrac{b \times h}{2} = 1 \rightarrow$

Zuzen baten ekuazioa (x1,y1) eta (x2,y2) puntuetarako hau da:
y-y1=[(y2-y1)/(x2-x1)](x-x1)

[7.] X zorizko aldagai bat honela banatzen dela uste da:

$$f(x) = k - x \;;\; 0 < x < k$$

(a) Dentsitate-funtzioa izan dadin k balioa kalkulatu.

(b) Banaketa funtzioa zehaztu.

(c) $P[0.5 < X < 1]$ probabilitatea kalkulatu dentsitate-funtzioa nahiz banaketa-funtzioa erabiliz.

(a) Azpiko azalera 1 izan behar da:

$$\int_0^k (k-x)dx = \left[kx - \frac{x^2}{2}\right]_0^k = \left[k^2 - \frac{k^2}{2}\right] - \left[k \times 0 - \frac{0^2}{2}\right] = \frac{k^2}{2} = 1 \rightarrow k = \sqrt{2} = 1.41$$

Beraz, $f(x) = 1.41 - x \;;\; 0 < x < 1.41.$

(b) $F(x) = P[X < x] = \int_{inf}^{x} f(x)dx = \int_0^x (1.41 - x)dx = 1.41x - \frac{x^2}{2} \;;\; 0 \leq x \leq 1.41$

(c) $P[0.5 < X < 1]$?

- $f(x)$ edo *pdf (probability density function)* erabiliz:

$$\int_{0.5}^{1} (1.41 - x)dx = \left[1.41x - \frac{x^2}{2}\right]_{0.5}^{1} = 0.33$$

- $F(x)$ edo *cdf (cumulative density function)* erabiliz:

$$P(X < 1) - P(X < 0.5) = F(x = 1) - F(x = 0.5) = \left(1.41 \times 1 - \frac{1^2}{2}\right) - \left(1.41 \times 0.5 \times 1 - \frac{0.5^2}{2}\right) = 0.33$$

[8.] Eguneko ekoizpena (kilotan) enpresa batean zorizko aldagaitzat hartu da, k makina kopuruaren mendean. Honela banatzen dela ezarri da:

$$f(x) = \frac{2x}{100k^2} \ ; \ 0 < x < 10k$$

(a) Froga ezazu k parametroa dela.

(b) 4 makina daudelarik, zenbatekoa da ekoizpena 30 baino handiagoa izateko probabilitatea?

(c) Banaketa funtzioa kalkulatu, k zehaztu gabe. Horretan oinarrituta, frogatu k parametroa dela eta kalkulatu aurreko galderako probabilitatea.

(d) Produktua kiloka paketeratzen bada, zenbat kaxa behar dira, sei makina daudelarik, ekoizpena paketeratu ahal izateko probabilitatea 0.8 izan dadin? Eta 0.9 izan dadin?

(e) Zenbat makina behar dira ekoizpena 60 baino handiagoa izateko probabilitatea 0.5 gutxienez izan dadin?

(a) $f(x)$ dentsitate-funtzioa izateko baldintzak k ororentzat betetzen direla frogatu besterik ez dago. Esaterako, azpiko azalera 1 izan behar dela kontuan hartuz:

$$\int_{\Omega} f(x)dx = \int_0^{10k} \frac{2x}{100k^2}dx = \left[\frac{2x^2}{200k^2}\right]_0^{10k} = \left[\frac{200k^2}{200k^2}\right] - [0] = 1$$

$\left[\frac{200k^2}{200k^2}\right] = 1$ ekuazioaren ebazpenean, soluzio infinitu daude (k ezin da bakandu), k guztietarako betetzen da ekuazioa. Beraz, k parametroa da.

(b) Orain $k = 4$. Beraz, hau izango da dentsitate-funtzioa:

$$f(x) = \frac{2x}{1600} \ ; \ 0 < x < 40$$

Eta ekoizpena 30 baino handiagoa izateko probabilitatea:

$$P[X > 30] = \int_{30}^{40} \frac{2x}{1600}dx = \left[\frac{2x^2}{3200}\right]_{30}^{40} = \left[\frac{3200}{3200}\right] - \left[\frac{1800}{3200}\right] = 0.5625$$

(c)

$$F(x) = \int_0^x \frac{2x}{100k^2}dx = \left[\frac{2x^2}{200k^2}\right]_0^x = \left[\frac{2x^2}{200k^2}\right] - [0] = \frac{x^2}{100k^2} \ ; \ 0 \leq x \leq 10k$$

k parametroa dela frogatzeko, $F(sup) = 1 \rightarrow F(10k) = 1$ baldintza baliatuko dugu: $F(10k) = \frac{100k^2}{100k^2} = 1$

k guztietarako baldintza betetzen denez, k parametroa da.

(d) Orain $k = 6$.

Zenbat motako problema da; beraz, proba dezagun balio zehatz batekin. Kaxa kopuru maximoa 60 izango da (orduan segurua bailitzateke ekoizpen osoa paketeratzen dela); beraz proba dezagun 30 paketerekin. 30 kaxa nahikoa izango dira ekoizpena 30 baino txikiagoa bada:

$$P[nahikoa] = P[X < 30] = \int_0^{30} \frac{2x}{3600} dx = \left[\frac{2x^2}{7200}\right]_0^{30} = \left[\frac{1800}{7200}\right] - [0] = 0.25$$

0.8ra heltzen ez garenez, ez da nahikoa. Beraz, balio zehatza kalkulatzeko, alda dezagun probabilitatea 0.8ra eta kaxa kopurua p-ra.

$$\left[\frac{2x^2}{7200}\right]_0^{p} = \left[\frac{2p^2}{7200}\right] - [0] = 0.8 \rightarrow p = 53.66$$

Kaxak diskretuak dira, eta orduan balio oso bat eman behar da. Beraz, 54 kaxa hartu behar dira, 53rekin ez baikara heltzen 0.8ko probabilitatera (0.8 minimo gisa interpretatu behar da).

Probabilitatea 0.9 izateko , kaxa gehiago behar dira:

$$\left[\frac{2x^2}{7200}\right]_0^{p} = \left[\frac{2p^2}{7200}\right] - [0] = 0.9 \rightarrow p = 56.92$$

Eta beraz, 57 kaxa beharko dira.

Zuzenean ere planteatu liteke: p kaxa edukita, nahikoa izango dira ekoizpena denean p edo txikiagoa (p finean, puntu bateko probabilitatea jarraituetan 0 dela dakigunez). Nahikoa izateko probabilitatea 0.8 izatea nahi dugunez, honela planteatzen da zuzenean:

$$P[nahikoa] = P[X < p] = \frac{2p^2}{7200} = 0.8$$

Eta hortik p bakantzen dugu.

[9.] Ataza bat egiteko denbora honela banatzen dela uste da:

$$F(x) = \frac{x^3 - 8}{19} \;\; ; \quad 2 \leq x \leq 3$$

(a) Frogatu banaketa funtzioa dela.

(b) Dentsitate-funtzioa eman.

(c) $P[X \geq 2.5]$ **kalkulatu banaketa- zein dentsitate-funtzioa erabiliz.**

(a) Hiru baldintza dira banaketa-funtzioa izateko bete behar direnak:

- $F(inf) = 0 \rightarrow F(x = 2) = 0$ (bete egiten da)
- $F(sup) = 1 \rightarrow F(x = 3) = 1$ (bete egiten da)
- $gorakorra \rightarrow F'(x) = \dfrac{3x^2}{19} > 0, \forall x \in [2, 3]$ (bete egiten da)

(b) Dentsitate-funtzioa banaketa-funtzioa deribatuz eskuratzen da:

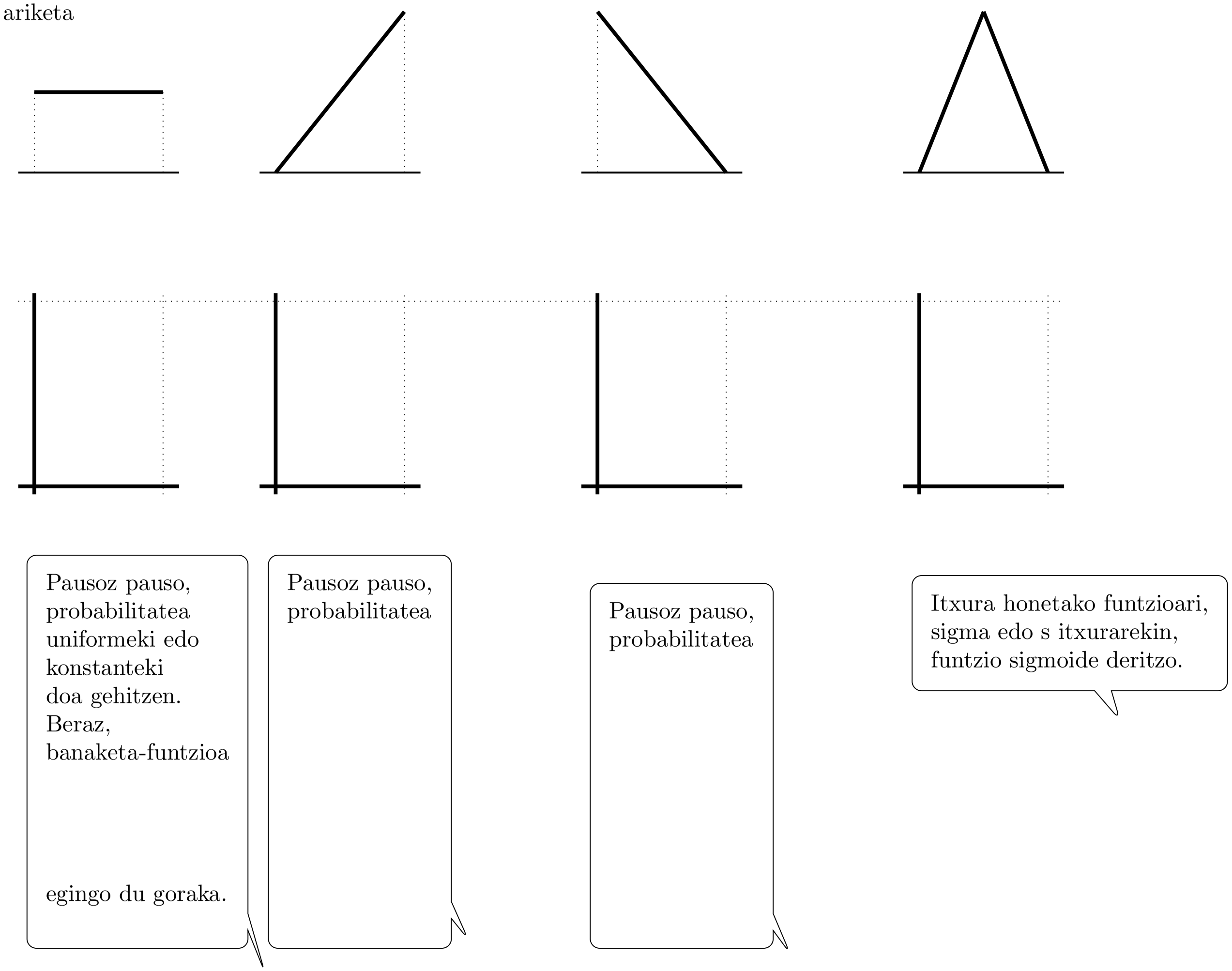
$$f(x) = F'(x) = \frac{3x^2}{19} \;\; ; \quad 2 < x < 3$$

(c) Puntu bateko probabilitatea 0 denez, berdintza ez da kontuan hartu behar.

Banaketa funtzioa baliatuz: $P[X > 2.5] = 1 - P[X < 2.5] = 1 - F(x = 2.5) = 0.59$

Dentsitate-funtzioa baliatuz: $P[X > 2.5] = \displaystyle\int_{2.5}^{3} \frac{3x^2}{19} dx = \left(\frac{x^3}{19} \right)_{2.5}^{3} = \left(\frac{3^3}{19} \right) - \left(\frac{2.5^3}{19} \right) = 0.59$

10. ariketa


Pausoz pauso, probabilitatea uniformeki edo konstanteki doa gehitzen. Beraz, banaketa-funtzioa
egingo du goraka.
Pausoz pauso, probabilitatea
Pausoz pauso, probabilitatea
Itxura honetako funtzioari, sigma edo s itxurarekin, funtzio sigmoide deritzo.

Jarraituzko hurbilketak

[11.] Denda batean saltzen diren laranjen pisua (gr) honela banatzen dela uste da:

$$f(x) = \frac{2}{10000}(x-100) \;\; ; \;\; 100 < x < 200$$

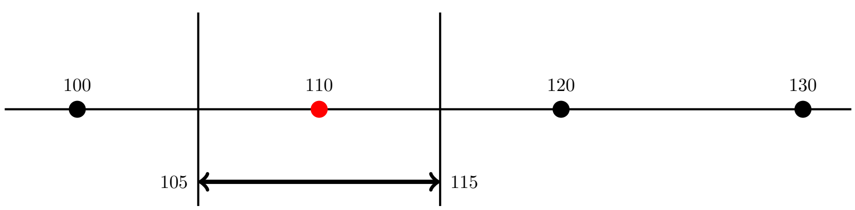
Zenbatekoa da laranja baten pisua zehazki 110 gramukoa izateko probabilitatea? Eta 110 gramukoa izateko probabilitatea jakinda balantzak 100-110-120-130-... erregistroak ematen dituela? Eta 130 gr edo pisu txikiagoa izateko probabilitatea?

Zentzu hertsian, 110 gramuko balioa puntu soil bat denez, laranja baten pisua zehazki 110 gramukoa izateko probabilitatea 0 da. Hala eta guztiz ere, 110 gramuko laranjak badaude. Kontraesana pisua praktikan neurtzean egiten dugun hurbilketan datza: 110 gramuko pisua neurtzean 110 gramuko gutxi gorabeherako pisua neurtzen da. Adibidez, enuntziatuan aipatzen den 10 grko zehaztasuna balantzan pisua hartuz:

Benetako pisua	Balantzako pisua
108	110
101	100
112	110

Horrela, 110 gramuko balantza-pisua benetako pisua 105-115 tartean dagoenean izango da. Horrela, honela kalkulatuko da eskatutako probabilitatea praktikan, jarraituzko hurbilketa eginez:

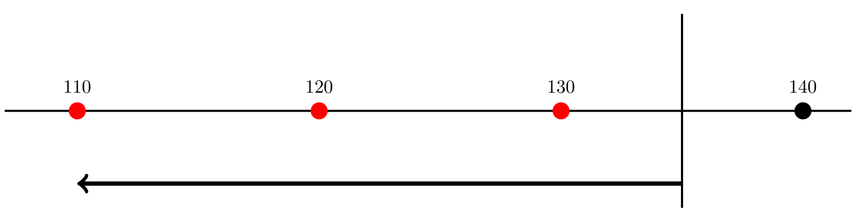
$$P[X = 110] = P[105 < X < 115] = \int_{105}^{115} \frac{2}{10000}(x-100)dx$$



Irudia 1: $P[X = 110]$ kalkulatzeko azalpena.

130 gr edo pisu txikiagoa izateko probabilitatea kalkulatzean, pentsa liteke F(x=130) kalkulatu behar dela, jarraituetan berdintzak kontuan hartzen ez direlako. Baina *praktikan* garrantzitsua da berdintza barneratzea, 130 grko laranjak egon badaudelako. Beraz, honela kalkulatu beharko genuke:

$$P[X \leq 130] = P[X < 135] = F(x = 135)$$



Irudia 2: $P[X \leq 130]$ kalkulatzeko azalpena.

[12.]

Denda batera egunero hurbiltzen den pertsona kopurua honela banatzen dela uste da:

$$f(x) = \frac{1}{100} \ ; \quad 200 < x < 300$$

Zenbatekoa da zehazki 250 pertsona etortzeko probabilitatea? Eta 250-260 bitartean etortzekoa, biak barne?

Pertsona kopurua probabilitate banaketa jarraitu batez definitu denez (berez diskretua da, baina balio asko hartzen dituenez, jarraitutzat hartu da) puntu bateko probabilitatea (250 izatekoa, hain zuzen) 0 izango da hertsiki. Alabaina, 250 pertsona etorri daitezke noski. Kontraesana berez diskretua den aldagai baterako (pertsona kopurua) probabilitate banaketa jarraitu bat erabiltzean datza. Kontraesana gainditzeko, jarraituzko hurbilketa egiten da (249.2 pertsona 249 dira, 249.6 pertsona 250 dira, ...):

$$P[X = 250] = P[249.5 < X < 250.5] = \int_{249.5}^{250.5} \frac{1}{100} dx$$

Banaketa jarraituetan ez dira berdintzak kontuan hartzen tarte bateko probabilitatea kalkulatzean, puntu bateko probabilitateak 0 direlako. Baina, berez diskretua den banaketa batean garrantzitsua da. Eskatutako bigarren probabilitatea, orduan, honela ebatziko da, tartea itxia dela eta beraz berdintza puntuak barnehartu behar direla kontuan hartuz:

$$P[250 \leq X \leq 260] = P[249.5 < X < 260.5] = \int_{249.5}^{260.5} \frac{1}{100} dx$$

[13.] Bi inbertsioren errendimenduen banaketak zehazten dira jarraian:

$$X : f(x) = \frac{x}{2} \ ; \ 0 < x < 2$$

$$Y : f(x) = 1.11x \ ; \ 0.1 < x < 1$$

(a) Erabaki inbertsio egokiena $VaR(0.01)$, $VaR(0.05)$, eta $VaR(0.10)$ irizpideak baliatuz.

(b) Interpretatu hitzez $Var(0.05)$ balioa, errendimenduaren maiztasunaren terminoetan.

$\boxed{\text{VaR(0.01)}}$

X inbertsiorako honela planteatzen da, VaR(0.01) balioaren azpiko probabilitatea 0.01 izan behar dela jakinik (garapenaren bukaeran):

$$P[X < VaR(0.01)] = \int_0^{VaR(0.01)} \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{VaR(0.01)} = \frac{VaR(0.01)^2}{4} = 0.01 \rightarrow VaR(0.01) = 0.2$$

Eta Y inbertsiorako:

$$P[Y < VaR(0.01)] = \int_{0.1}^{VaR(0.01)} 1.11x dx = \left[\frac{1.11x^2}{2}\right]_{0.1}^{VaR(0.01)} = \frac{1.11VaR(0.01)^2}{2} - \frac{1.11 \times 0.1^2}{2} = 0.01 \rightarrow VaR(0.01) = 0.16$$

$\boxed{\text{VaR(0.05)}}$

Aurreko emaitza txantiloi gisa erabiliz, X inbertsiorako (negritan dagoen balioa soilik aldatuz):

$$\frac{VaR(0.05)^2}{4} = \mathbf{0.05} \rightarrow VaR(0.05) = 0.44$$

Eta Y inbertsiorako:

$$\frac{1.11VaR(0.05)^2}{2} - \frac{1.11 \times 0.1^2}{2} = \mathbf{0.05} \rightarrow VaR(0.05) = 0.31$$

$\boxed{\text{VaR(0.10)}}$

Aurreko emaitza txantiloi gisa erabiliz, X inbertsiorako:

$$\frac{VaR(0.1)^2}{4} = \mathbf{0.1} \rightarrow VaR(0.1) = 0.63$$

Eta Y inbertsiorako:

$$\frac{1.11VaR(0.1)^2}{2} - \frac{1.11 \times 0.1^2}{2} = \mathbf{0.1} \rightarrow VaR(0.1) = 0.43$$

[15.] Hilero enpresa batek salduko duen makina kopurua honela banatzen dela uste da:

Kopurua	**Probabilitatea**
0	**0.05**
1	**0.2**
2	**0.25**
3	**0.25**
4	**0.15**
5	**0.1**
	1

Itxaropen matematikoa kalkulatu behar da. Azkenean, bi hilabetetan zehar, 1 eta 2 saldu da, hurrenik hurren. Kalkulatu salmenten batezbesteko aritmetikoa, eta azaldu ezazu itxaropenarekiko diferentzia.

Banaketa diskretua da; beraz, $\mu = \sum xp(x)$ formula baliatzen da:

x	p(x)	xp(x)
0	0.05	0
1	0.2	0.2
2	0.25	0.5
3	0.25	0.75
4	0.15	0.60
5	0.1	0.50
	1	$\mu = 2.55$

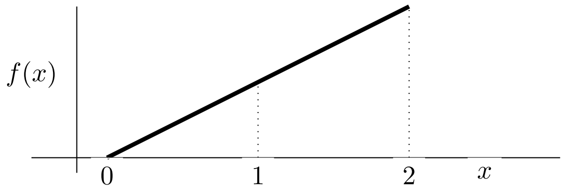
Probabilitate-banaketa horri jarraiki, enpresak 2.55 makina saltzea espero behar du batez beste hilabete batzuetan zehar (ez, noski, hurrengo hilabetean). Esperantza hori epe luzera helduko da, probabilitate horiek zuzenak badira.

Bi hilabetera 1 eta 2 saldurik, batezbestekoa (1+2)/2=1.5 da, 2.55etik aski urrun; hain zuzen, epe laburrera arrunta da itxaropenetik desbideratzea handia izatea. Kasu honetan, enpresak *suerte txarra* izan duela esan liteke. Epe luzera, probabilitateak zuzenak badira, biak berdintzen joango dira.

[16.] Makina batek egunero egiten duen pieza kopurua (milaka unitatetan) honela banatzen dela uste da:

$$f(x) = \frac{x}{2} \;;\; 0 < x < 2$$

Irudikatu dentsitate-funtzioa eta hurbildu ezazu, aliritzira, itxaropen matematikoa. Kalkulatu ezazu zehazki.



$x = 1$-etik gorako balioek probabilitate handiagoa dute $x = 1$-etik beherakoek baino. Beraz, joera handiagoa dagoenez 1 baino handiagoa gertatzeko, itxaropen matematikoa 1 baino handiagoa da.

$$\mu = E[x] = \int_{\Omega} x f(x) dx = \int_0^2 x \frac{x}{2} dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \left[\frac{2^3}{6}\right] - \left[\frac{0^3}{6}\right] = \frac{8}{6} = 1.333 = 1333 \; unitate$$

[18] Hozkailu bateko uneko tenperaturak parametrodun banaketa honi jarraitzen diola uste da:

$$f(x) = \frac{1}{a} \ ; \ 0 < x < a$$

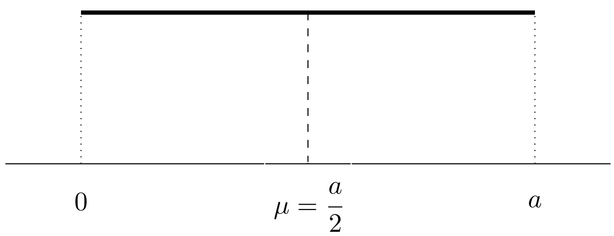
(a) Grafikoki irudika ezazu eta interpretatu itxaropenari dagokionean.

(b) Kalkulatu itxaropena eta desbideratze estandarra.

(c) Birparametrizatu dentsitate-funtzioa eta desbideratzea batezbestekoaren arabera.

(a)

Probabilitatea uniformea edo orekatua denez balio posibleen tartean, itxaropena tarte horren erdi-erdian izango da:



(b)

Itxaropena kalkulatzen dugu lehenbizi:

$$\mu = E[X] = \alpha_1 = \int_{\Omega} xf(x)dx = \int_0^a x\frac{1}{a}dx = \left[\frac{x^2}{2a}\right]_0^a = \left[\frac{a^2}{2a}\right] - [0] = \frac{a}{2}$$

Desbideratze estandarra kalkulatzen dugu orain. Horretarako bariantza behar dugu:

$$\sigma_X^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$$

$$\alpha_2 = E[X^2] = \int_{\Omega} x^2 f(x)dx = \int_0^a x^2\frac{1}{a}dx = \left[\frac{x^3}{3a}\right]_0^a = \left[\frac{a^3}{3a}\right] - [0] = \frac{a^2}{3}$$

$$\sigma_X^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{a^2}{3} - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{12}$$

Eta hortik, desbideratzea hau izango da: $\sigma_X = \sqrt{\frac{a^2}{12}}$

Ohartu behar da parametrodun banaketa batean, itxaropena, bariantza eta beste neurriak ere parametro horren mendean geratuko direla.

(c) Birparametrizazioa parametrodun probabilitate-banaketa bat beste parametro batzuen arabera zehaztea da:

$\mu = \frac{a}{2} \rightarrow a = 2\mu$

Beraz, hau izango da dentsitate-funtzioa birparametrizatua: $f(x) = \frac{1}{2\mu}; \ 0 < x < 2\mu$

Eta hau desbideratze estandarra: $\sigma_X = \sqrt{\frac{4\mu^2}{12}}$

[19] Pieza batek duen akats kopurua honela banatzen dela uste da:

Akatsak piezako	Probabilitatea
0	0.5
1	0.4
2	0.1
	1

(a) Kalkulatu itxaropena eta desbideratze estandarra.

(b) batez beste zenbat akats izango dira 100 piezetan?

(c) Pieza batetik bestera independentzia suposatuz, zenbatekoa da akats kopuru totalaren desbideratzea? Eta independentzia ez badago?

(d) Akats bakoitzak enpresarentzat dakarren kostua 10€ da, gehi 20€-ko kostu finkoa erreklamazio-zerbitzua edukitzeagatik. Kalkulatu itxarondako kostua pieza bakoitzeko, eta horren desbideratzea, itxaropenaren nahiz bariantzaren propietateak erabiliz nahiz kostu posible eta horien probabilitateen zehaztapenetik.

(a)

x	$p(x)$	$xp(x)$	$x^2p(x)$
0	0.5		
1	0.4		
2	0.1		
	1	$\alpha_1 = \mu =$	$\alpha_2 =$

- $\mu =$

- $\sigma_x^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 =$

- $\sigma_X = \sqrt{} = 0.66$

(b)

- BARIANTZEN BATUKETA EGITEN DA BETI, INOIZ EZ DESBIDERATZEEN BATUKETA!
- Gehitzen den konstanteak ez dio eragiten bariantzari.
- Bidertzen en konstanteak ber 2 egiten du bariantza.

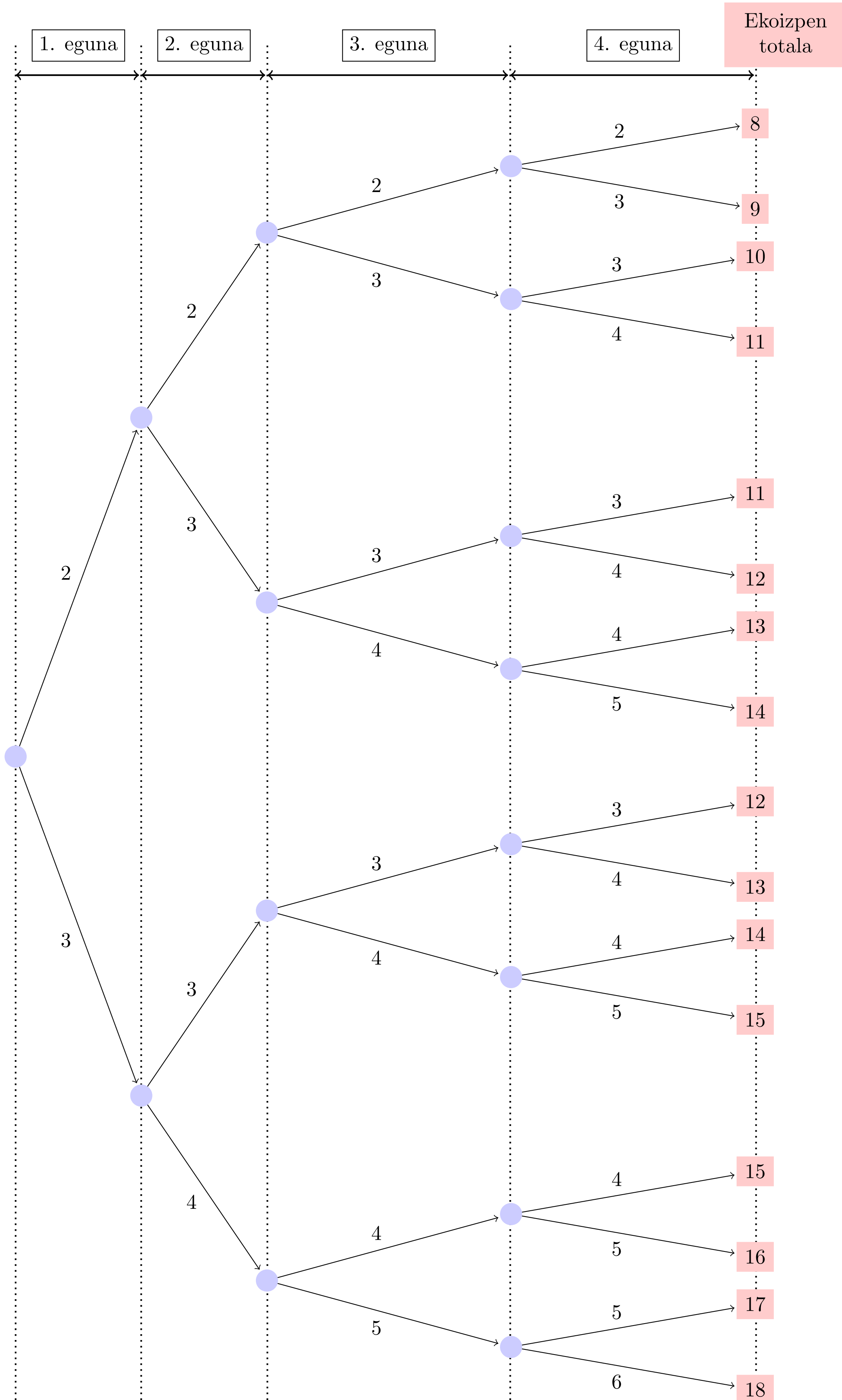
$\boxed{\text{(c)}}$

Kostuen zehaztapenetik:

x	k	$p(k)$	$kp(k)$	$k^2p(k)$
0	20	0.5		
1	30	0.4		
2	40	0.1		
		1	$\alpha_1 = \mu =$	$\alpha_2 =$

- $\mu_K =$
- $\sigma_K^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 =$
- $\sigma_K = \sqrt{} =$

[20] Lantegi batean ... Prozesuak eta dependentziak irudikatzeko egokia izaten den probabilitate-zuhaitza eratzen dugu:



Taula moduan erosoagoa da:

1. eguna	2. eguna	3. eguna	4. eguna	Ekoizpena (x)	p(x)	xp(x)	Denbora 8 piezatarako (egunak)
2 (0.3)	2 (0.3)	2(0.3)	2 (0.3)	8	0.0081	0.0648	4
2 (0.3)	2 (0.3)	2 (0.3)	3 (0.7)	9	0.0189	0.1701	3.66
2 (0.3)	2 (0.3)	3 (0.7)	3 (0.3)	10	0.0189	0.1890	3.33
2 (0.3)	2 (0.3)	3 (0.7)	4 (0.7)	11	0.0441	0.4851	3.25
2 (0.3)	3 (0.7)	3 (0.3)	3 (0.3)	11	0.0189	0.2079	3
2 (0.3)	3 (0.7)	3 (0.3)	4 (0.7)	12	0.0441	0.5292	3
2 (0.3)	3 (0.7)	4 (0.7)	4 (0.3)	13	0.0441	0.5733	2.75
2 (0.3)	3 (0.7)	4 (0.7)	5 (0.7)	14	0.1029	1.4406	2.75
3 (0.7)	3 (0.3)	3 (0.3)	3 (0.3)	12	0.0189	0.2268	2.66
3 (0.7)	3 (0.3)	3 (0.3)	4 (0.7)	13	0.0441	0.5733	2.66
3 (0.7)	3 (0.3)	4 (0.7)	4 (0.3)	14	0.0441	0.6174	2.5
3 (0.7)	3 (0.3)	4 (0.7)	5 (0.7)	15	0.1029	1.5435	2.5
3 (0.7)	4 (0.7)	4 (0.3)	4 (0.7)	15	0.0441	0.6615	2.25
3 (0.7)	4 (0.7)	4 (0.3)	5 (0.7)	16	0.1029	1.6464	2.25
3 (0.7)	4 (0.7)	5 (0.7)	5 (0.3)	17	0.1029	1.7493	2.20
3 (0.7)	4 (0.7)	5 (0.7)	6 (0.7)	18	0.2401	4.3218	2.20
					1	$\mu = 15$	

Galdera: 2-2-2-3 sekuentzian, zenbat da 8 pieza ekoizteko denbora?

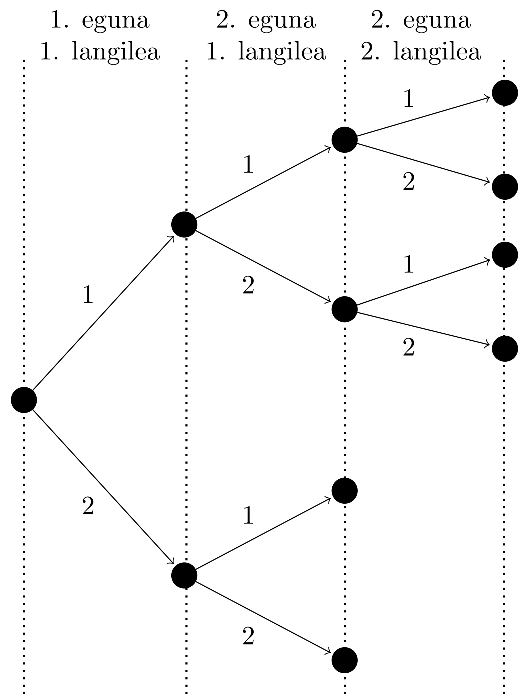
Erantzuna: 8. pieza 3 egun eta 2/3=0.66 egunetara egiten da.

8 pieza egiteko behar den batez besteko denbora kalkulatzeko, aurreko taulako azken zutabeko balioak (denbora posibleak) bildu egin ditugu, adar ezberdinetako probabilitateak gehituz (ikus, adibidez, 3 egun behar direneko kasua):

Egunak (y)	p(y)	yp(y)
2.20	0.343	0.7546
2.25	0.147	0.33075
2.5	0.147	0.3675
2.66	0.063	0.16758
2.75	0.147	0.40425
3	0.0189+0.0441=0.063	0.189
3.25	0.0441	0.143325
3.33	0.0189	0.062937
3.66	0.0189	0.069174
4	0.0081	0.0324
	1	$\mu = 2.521516$

Horrela, batez beste 2.52 egun behar dira 8 pieza egiteko.

21. problemaren ebazpena: Lantegi batean langile bakarra aritzen da egun batean. (...)



Taula 1: **: Probabilitate-zuhaitza taula moduan.**

1. eguna 1. langilea	2. eguna 1. langilea	2. eguna 2. langilea	Ekoizpena(x)	p(x)=p(y)	2 piezako denbora (y)
1 (0.4)	1 (0.4)	1 (0.4)	3	0.064	2

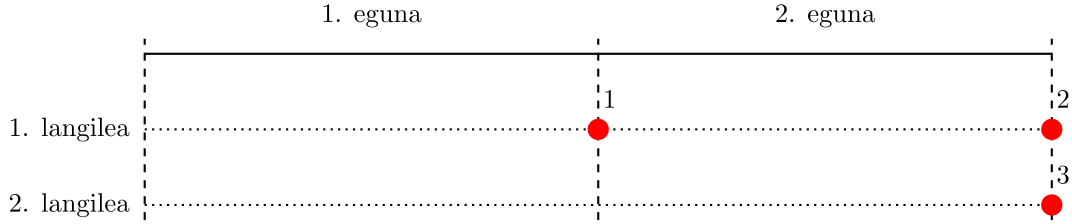
Taula 2: **Ekoizpenaren eta 2 piezako denboraren itxaropenak: taula trinkoak**

x (ekoizpena)	p(x) probabilitatea	xp(x)	y (denbora)	p(y) probabilitatea	yp(y)
					1.232

Beraz, 2 pieza egiteko espero behar da 1.232 egun behar izatea.

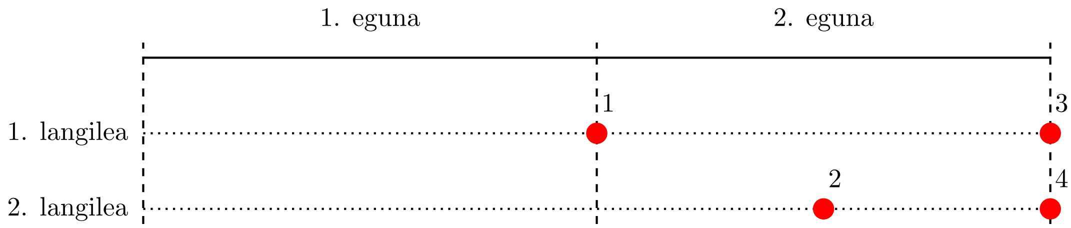
Produkzio-lerroen eskemak ekoizpen-denborak kalkulatzeko:

Galdera: 1-1-1 ekoizpen-sekuentzian, zenbat egunetara egiten da 2. pieza?



Erantzuna: 2. pieza egunbetera egiten da.

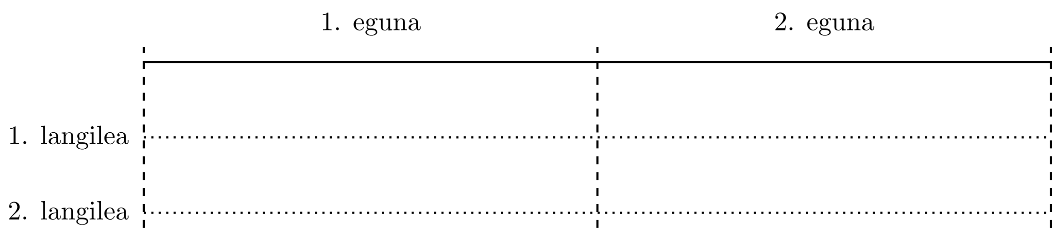
Galdera: 1-1-2 sekuentzian, zenbat egunetara egiten da 2. pieza?



Erantzuna: 2. pieza egun t'erdira egiten da.

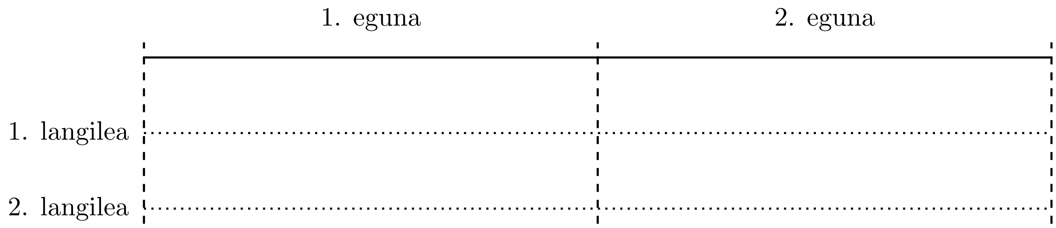
Orain zure txanda da. Bete hurrengo diagramak:

Galdera: 1-2-1 sekuentzian, zenbat egunetara egiten da 2. pieza?



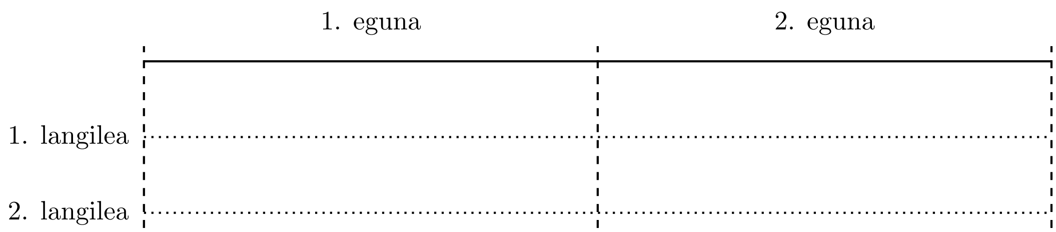
Erantzuna:

Galdera: 1-2-2 sekuentzian, zenbat egunetara egiten da 2. pieza?



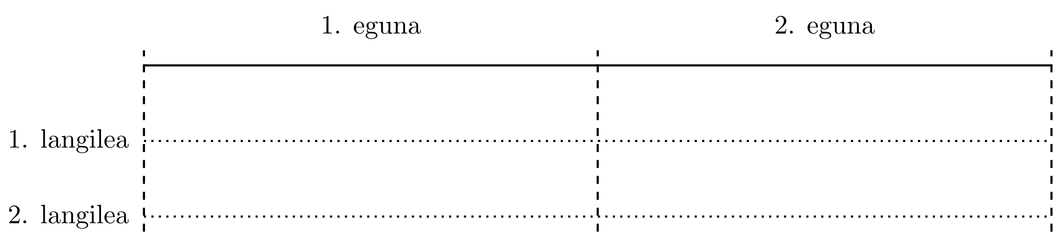
Erantzuna:

Galdera: 2-1 sekuentzian, zenbat egunetara egiten da 2. pieza?



Erantzuna:

Galdera: 2-2 sekuentzian, zenbat egunetara egiten da 2. pieza?



Erantzuna:

[22.] Enpresa batek bi aktibo ditu aukeran inbertsio moduan. Eguneko errendimenduak honela banatzen dira:

A aktiboa:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{8} \ ; \ 0 < x < 4$$

B aktiboa:

$$f(x) = \frac{1}{5}; \ 0 < x < 5$$

Utilitate-funtzio moduan hau baliatu behar da:

$$U = \frac{\mu}{\sigma}$$

Aztertu zein den erabaki hoberena, epe laburrera nahiz epe luzera.

Epe luzera itxaropenari soilik erreparatu behar zaio. A aktiboaren erredimenduaren itxaropena honela kalkulatzen da:

$$\mu_A = \int_0^4 x\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{8}\right)dx = \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{24}\right]_0^4 = 1.33$$

B aktiboarena, berriz:

$$\mu_B = \int_0^5 x\frac{1}{5}dx = \left[\frac{x^2}{10}\right]_0^5 = 2.5$$

batez beste espero daitekeen errendimendua handiagoa duenez, B aktiboan inbertitzea erabaki behar da epe luzera.

Epe laburrera, berriz, itxaropena nahiz bariantza (hau da, arriskua) hartu behar dira kontuan. A aktiboaren errendimenduen bariantza kalkulatzeko, lehendabizi jatorriari buruzko lehen mailako momentua kalkulatu behar da:

$$\alpha_{2A} = \int_0^4 x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{8}\right)dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{32}\right]_0^4 = 10,66 - 8 = 2,66$$

Bariantza honela kalkulatzen da, jatorriari buruzko lehen mailako momentua itxaropenarekin bat datorrela gogoratuz:

$$\sigma_A^2 = \alpha_{2A} - \alpha_{1A}^2 = 2.66 - 1.33^2 = 0.8911$$

B aktiboarekin era berean eginez:

$$\alpha_{2B} = \int_0^5 x^2\frac{1}{5}dx = \left[\frac{x^3}{15}\right]_0^5 = 8.33$$

$$\sigma_B^2 = \alpha_{2B} - \alpha_{1B}^2 = 8.33 - 2.5^2 = 2.08$$

Itxaropenari buruz B aktiboa hobesten den bitartean, arriskuari buruz A aktiboa hobetsi behar da. Dilema ebazteko emandako utilitate-funtzioa kalkulatu behar da bi aktiboetarako:

$$U_A = \frac{\mu_A}{\sigma_A} = \frac{1.33}{\sqrt{0.8911}} = 1.41$$

$$U_B = \frac{\mu_B}{\sigma_B} = \frac{2.5}{\sqrt{2.08}} = 1.73$$

Utilitate handiagoa du B aktiboak. Beraz, utilitate funtzioa hori erabiliz (eta hori eztabaidagarria da) B aktiboa hobetsi beharko litzateke epe laburrera ere.

23. ariketa: Enpresa batek lau inbertsio ditu aukeran. (...)

Taula 3: **: Itxaropenak eta bariantzak kalkulatzeko taulak**

x	$p_A(x)$	$xp_A(x)$	$x^2p_A(x)$	$p_B(x)$	$xp_B(x)$	$x^2p_B(x)$	$p_C(x)$	$xp_C(x)$	$x^2p_C(x)$	$p_D(x)$	$xp_D(x)$	$x^2p_D(x)$
-2	0.05			0			0			0.05		
-1	0.25			0.20			0.15			0.10		
0	0.30			0.50			0.40			0.35		
1	0.20			0.25			0.30			0.40		
2	0.20			0.05			0.15			0.10		
	1	μ_A=	α_{2A}=		μ_B=	α_{2B}=		μ_C=	α_{2C}=		μ_D=	α_{2D}=

Taula 4: Bariantzaren kalkulua

Aukera	$\sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$	σ
A		
B		
C		
D		

Aukera	μ	σ	$p(galdu)$
A			0.05+0.25=0.30
B			
C			
D			

	A	B	C	D
A	x			
B	-	x		
C	-	-	x	
D	-	-	-	x

μ	σ	$p(galdu)$
C		C-D
		C-D

24. ariketa

(a)

- 3 ord. erosita

s	m	$p(m)$	$mp(m)$

- 4 ord. erosita

s	m	$p(m)$	$mp(m)$

- 5 ord. erosita

s	m	$p(m)$	$mp(m)$

- 6 ord. erosita

s	m	$p(m)$	$mp(m)$

- 7 ord. erosita

s	m	$p(m)$	$mp(m)$

24. ariketa

(b)

PARAMETROA	**6 unit. erosita**	**5 unit. erosita (aurreratu)**	**5 unit. erosita**
E[galdu]		handiagoa/txikiagoa/berdina	
E[saldu]		handiagoa/txikiagoa/berdina	
E[soberan]		handiagoa/txikiagoa/berdina	
E[eskaria]		handiagoa/txikiagoa/berdina	
Fill rate		handiagoa/txikiagoa/berdina	
P[instock]		handiagoa/txikiagoa/berdina	
P[stockout]		handiagoa/txikiagoa/berdina	

KOADRATZEAK	**6 unitate erosita**	**5 unitate erosita**
E[saldu]+E[soberan]=erosi		
E[galdu]+E[saldu]=E[esk]		
P[instock]+P[stockout]=1		

24. ariketa

(b)

E[galdu]

•6 unitate erosita

x	$p(x)$	$xp(x)$

•5 unitate erosita

x	$p(x)$	$xp(x)$

E[saldu]

•6 unitate erosita

x	$p(x)$	$xp(x)$

•5 unitate erosita

x	$p(x)$	$xp(x)$

E[soberan]

•6 unitate erosita

x	$p(x)$	$xp(x)$

•5 unitate erosita

x	$p(x)$	$xp(x)$

E[eskaria]

•6 zein 5 unitate erosita; izan ere

x	$p(x)$	$xp(x)$
		5

[25 ariketa]

$E[m] =$

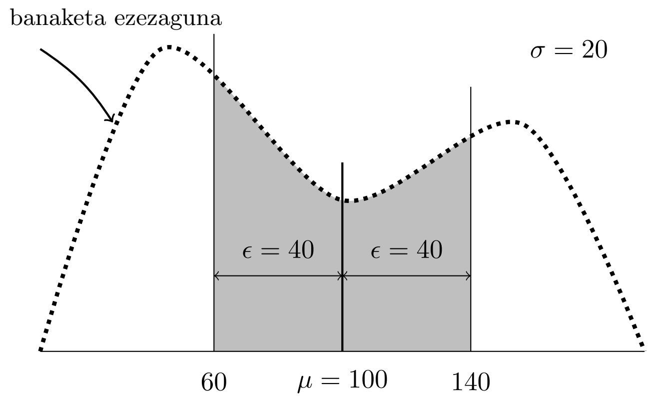
$$= \frac{1}{80.000}\left[\int_0^k (2x-k)xdx + \int_k^{400} kxdx\right] = \frac{1}{80.000}\left[\int_0^k (2x^2-kx)dx + \int_k^{400} kxdx\right] =$$

$$= \frac{1}{80.000}\left[\left(\frac{2x^3}{3} - \frac{kx^2}{2}\right)_0^k + \left(\frac{kx^2}{2}\right)_k^{400}\right] = \frac{1}{80.000}\left[\left(\frac{2k^3}{3} - \frac{k^3}{2}\right) + \left(\frac{160.000k}{2} - \frac{k^3}{2}\right)\right] = \frac{1}{80.000}\left(-\frac{k^3}{3} + 80.000k\right)$$

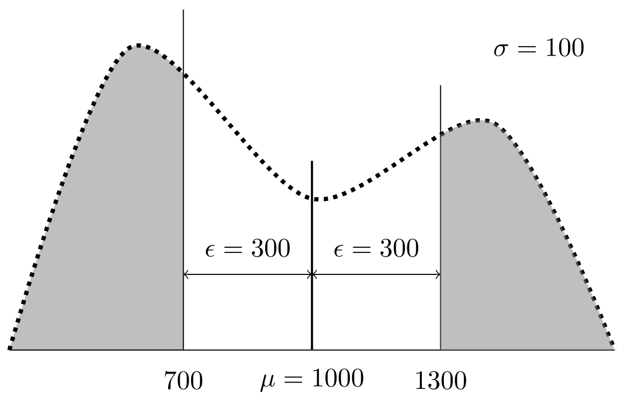
$$\frac{\partial dE[m]}{\partial k} =$$

$k^* = 282.84$ kg.

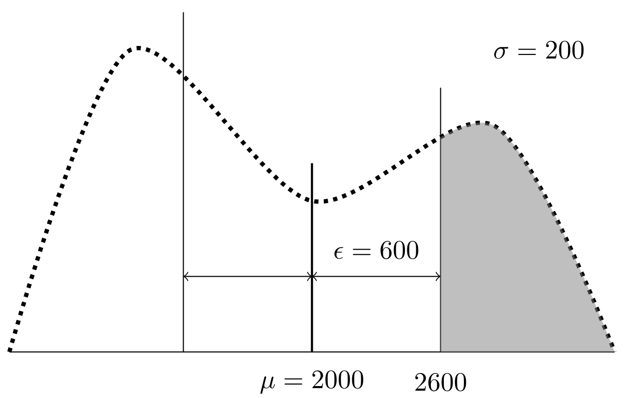
[26]


banaketa ezezaguna
$\sigma = 20$
$\epsilon = 40$
$\epsilon = 40$
60
$\mu = 100$
140

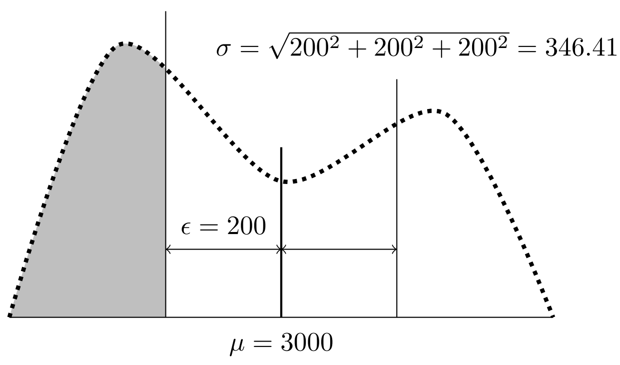
[27]


$\sigma = 100$
$\epsilon = 300$
$\epsilon = 300$
700
$\mu = 1000$
1300

[28]


$\sigma = 200$
$\epsilon = 600$
$\mu = 2000$
2600

[30]


$\sigma = \sqrt{200^2 + 200^2 + 200^2} = 346.41$
$\epsilon = 200$
$\mu = 3000$

Prozesu binomialak

---

[32] Lantegi batean 12 pieza egin behar dira bezero batentzat. Pieza bakoitza akastuna izateko probabilitatea 0.12 da.
(a) Nola banatzen da pieza akastunen kopurua?

$X \sim B(n = 12, p = 0, 12)$, betiere ekoizpen-prozesuan independentzia badago piezen artean.

(b) Nola banatzen da pieza akasgabeen kopurua?

$$Y \sim B(n = 12, p = 0, 88) : P[Y = y] = 0.88^y 0.12^{12-y} \frac{12!}{y!(12-y)!}; y = 0, 1, 2, ..., 12$$

(c) Zenbat da 4 pieza akastun suertatzeko probabilitatea?

$$P[12tik\ 4'X'] = P[XXXXOOOOOOeo] = \underbrace{0.12 \times 0.12 \times \cdots \times 0.12}_{4\ aldiz} \times \underbrace{0.88 \times \cdots \times 0.88}_{8\ aldiz} = 0.12^4 \cdot 0.88^8 \cdot \frac{12!}{4!8!}$$

(d) Zenbat da 3 pieza akasgabe suertatzeko probabilitatea? Akastunen terminoetan, nola adieraziko zenuke aurreko probabilitatea?

$$P[12tik\ 3'O'] = P[Y = 3] = P[12tik\ 9'X'] = P[X = 9] = 0.88^3 \cdot 0.12^9 \cdot \frac{12!}{3!9!}$$

(e) Zenbat da 3 pieza akasgabe eta 9 pieza akastun izateko probabilitatea?

Aurrekoaren berdina.

(f) Zenbat da akastun kopurua 2 edo txikiagoa izateko probabilitatea?

$$P[X \leq 2] = P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] = 0.12^0 \cdot 0.88^{12} \cdot \frac{12!}{0!12!} + 0.12^1 \cdot 0.88^{11} \cdot \frac{12!}{1!11!} + 0.12^2 \cdot 0.88^{10} \cdot \frac{12!}{2!10!}$$

(g) Zenbat da akastun kopurua 3 baino txikiagoa izateko probabilitatea? Akasgabeen terminoetan, nola adieraziko zenuke aurreko probabilitatea?

Aurreko atalekoaren berdina da: $P[X < 3] = P[X \leq 2]$.

Akasgabeen terminoetan: $P[X \leq 2] = P[Y \geq 10]$

(h) Zenbat da akastun kopurua 8 baino handiagoa izateko probabilitatea?

$P[X > 8] = P[X = 9] + P[X = 10] + P[X = 11] + P[X = 12]$

(i) Aurreko biak Larson nomograma erabiliz

h puntukoa:

- $P[X > 8] = P[X \geq 9]$-tik zuzenean
- $P[X \geq 9] = P[Y \leq 3]$-tik
- $P[X \geq 9] = 1 - P[X \leq 8]$-tik

(j) Zenbat da akastun kopurua 10 edo handiagoa izateko probabilitatea?

$P[X \geq 10] = P[X = 10] + P[X = 11] + P[X = 12]$

(k) Zenbat da akastun kopurua 4 eta 6 artean izateko probabilitatea, biak barne?

$P[4 \leq X \leq 6] = P[X = 4] + P[X = 5] + P[X = 6]$

(l) Aurreko guztiak R softwarearen bidez ebatzi.

```
> dbinom(4,12,0.12) #P[X=4];X~B(12,0.12)
[1] 0.03691404
> dbinom(3,12,0.88) #P[Y=3];Y~B(12,0.88)
[1] 7.735741e-07
> pbinom(2,12,0.12) #P[X<=2];X~B(12,0.12)
[1] 0.8332749
> pbinom(2,12,0.12) #P[X<3];X~B(12,0.12)
[1] 0.8332749
```

```
> pbinom(8,12,0.12,lower.tail=FALSE) #P[X> 8];X~B(12,0.12)
[1] 8.060138e-07
> 1-pbinom(8,12,0.12) #P[X> 8];X~B(12,0.12) beste era batera
[1] 8.060138e-07
>x=9:12
>sum(dbinom(x,12,0.12)) #P[X> 8];X~B(12,0.12) beste era batera
[1] 8.060138e-07
> pbinom(9,12,0.12,lower.tail=FALSE) #P[X>10];X~B(12,0.12)
[1] 3.243975e-08
> 1-pbinom(9,12,0.12) #P[X>10];X~B(12,0.12) beste era batera
[1] 3.243975e-08
> pbinom(6,12,0.12)-pbinom(3,12,0.12) #P[4<=X<=6];X~B(12,0.12)
[1] 0.04624932
> x=4:6
> sum(dbinom(x,12,0.12)) #P[4<=X<=6];X~B(12,0.12) beste era batera
[1] 0.04624932
```

(m) Zenbat da batez besteko akastun kopurua?

$\mu_X = np = 12 \times 0.12 = 1.44\ akastun$

(n) R baliatuz, zein da probabilitate handieneko akastun kopurua?

```
> x=0:12
> dbinom(x,12,0.12)
 [1] 2.156712e-01 3.529164e-01 2.646873e-01 1.203124e-01 3.691404e-02
 [6] 8.053972e-03 1.281314e-03 1.497639e-04 1.276397e-05 7.735741e-07
[11] 3.164621e-08 7.846168e-10 8.916100e-12
```

Probabilitate handieneko akastunen kopurua $x = 1$ da, 0.3529ko probabilitatearekin. Banaketa binomialean probabilitate handieneko balioa bat dator np itxaropenarekin, edo horren inguruko balio bat da.

(o) R baliatuz, bezeroari zenbat akastun ziurta dakizkioke 0.9ko gutxieneko probabilitateaz?

Bezero bati akastun kopuru bat ziurtatzea hari akastun kopurua x balio bat edo txikiagoa dela adieraztea da:

$$P[X \leq x] > 0.9$$

```
> x=0:12
> pbinom(x,12,0.12)
 [1] 0.2156712 0.5685876 0.8332749 0.9535873 0.9905014 0.9985554 0.9998367
 [8] 0.9999864 0.9999992 1.0000000 1.0000000 1.0000000 1.0000000
```

0.9ko probabilitatea gainditzen duen azpiko lehen probabilitatea $x = 3$ balioari dagokiona da. Beraz, ziurta daitekeen gehienezko akastun kopurua 3 da, 0.9535eko probabilitatearekin.

---

[33] Herri batean 300 emakume eta 200 gizonezko daude.

(a) Zoriz eta itzuleraz 90 pertsona aukeratzen badira, nola banatzen da emakume kopurua? Eta itzulerarik gabe egingo balitz?

Itzuleraz egiten da, aukeratutako pertsonak herriak osatzen duen populaziora itzuliz alegia, emakumea izateko probabilitatea konstantea da aldi bakoitzean, 300/500 hain zuzen, independentzia dago beraz, eta orduan banaketa binomiala erabil egin daiteke:

$X : \text{emakume kopurua} \sim B\left(n = 90, p = \dfrac{300}{500}\right)$

Itzulerarik gabe egingo balitz, emakumea izateko probabilitatea aldatuko litzateke pertsonak aukeratu eta aparte jarri ahala, aldi bakoitzean aurrekoan baino pertsona bat gutxiago dagoelako (bigarrena emakumea izateko probabilitatea, lehenengoa emakumea izan da, 299/499 da), eta orduan banaketa binomiala ezin da erabili.

Populazio handien kasuan, ordea, itzulerarik gabeko probabilitateak oso pixkanaka aldatzen dira, eta banaketa binomiala sinplifikazio gisa erabil daiteke. ´

(b) Zenbat da emakume proportzioarekin bat datorren emakume kopurua suertatzeko probabilitatea?

$P[X = \%60 = 90 \times 0.6 = 54] = 0.6^{54} \times 0.4^{36} \times \dfrac{90!}{54!36!} = 0.0855874$

(c) Aurreko emakume kopurua banaketa binomialaren zein ezaugarrirekin dator bat?

Batezbesteko edo itxarondako balioarekin: $\mu = np = 90 \times 0.6 = 54$. Balio honi dagokion probabilitatea guztietan handiena da, baina hala ere ikusten dugu horren probabilitatea txikia dela.

(d) Zenbat da emakume kopurua itxaropenaren inguruko ± 10 zabalerako tarte batean izateko probabilitatea?

$P[X = 54 \pm 10] = P[44 \leq X \leq 64]$

Kalkulua luzea da eskuz, R-rekin berriz berehalakoa da. Jarraian bi eratara kalkulatzen dugu:

```
> x=44:64
> sum(dbinom(x,90,0.6))
[1] 0.9766947
> pbinom(64,90,0.6)-pbinom(43,90,0.6)
[1] 0.9766947
```

(e) Interpretatu (b), (c) eta (d) emaitzak.

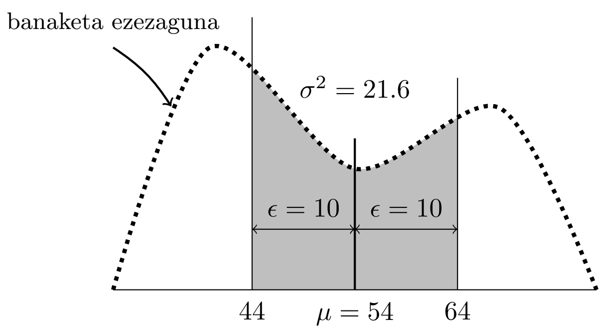
Probabilitate handia duen, orokorrean, ez da itxaropenaren balio zehatza gertatzea ($P[X = 54] = 0.0855874$), horren inguruko balio bat gertatzea baizik ($P[44 \leq X \leq 64] = 0.9766947$). Hartara, esan daiteke orokorrean, eta estatistikako balio ezezagunen estimazio-problemei buruz, gehienetan ez garela heltzen bilatzen den balio zehatzera, baina probabilitate handia dagoela bilatzen den balio horren inguruanm suertatzeko; beste hitzetan, estimazioetan beti izaten da errore bat, baina errore hori txikia izaten da, gauzak behar bezala egiten badira.

(f) Kalkulatu (d) ataleko probabilitatea, itxaropena eta bariantza soilik direla ezagunak suposaturik.

Itxaropena $np = 90 \times 0.6 = 54$ da, eta bariantza $npq = 90 \times 0.6 \times 0.4 = 21.6$. Horiek soilik harturik, emakume kopuruak lege binomialari jarraitzen diola kontuan hartu gabe, (d) ataleko probabilitatea honela kalkulatuko genuke Txebixev-en desberdintza baliatuz:

$$P[e = 54 \pm 10] = P[44 \leq X \leq 64] = P[|X - 54| \leq 10] \geq 1 - \frac{21.6}{10^2} = 0.784$$

Ikusten denez, kasu honetan Txebixev-en ezberdintzak ez du hurbilketa fina egiten, eskatutako probabilitatea 0.784 baino handiagoa dela adierazita, probabilitate zehatza 0.97 baita.



[34] Toki batean egun batean euria egiteko probabilitatea 0.4 da eta egun batetik bestera erabateko independentzia dago. Bertako teilatu bat konpontzeko 7 egun ateri behar dira. Zenbat egunetarako alokatu behar da garabi bat teilatuaren konponketa burutu ahal izateko probabilitatea 0.9 izan dadin? Eta 0.99 izan dadin?

Metodoa: saiatu-errorea-saiatu

- **Galdera osagarria: zenbat egun behar ditugu batezbeste teilatua konpontzeko?**

- 7 egunetarako alokatuta (X: euri egunak $\sim B(n = 7, p = 0.4)$):

  P[konpondu] = P[0 euri egun 7 egunetatik] $= 0.6^7 = 0.4^0 0.6^7 \dfrac{7!}{0!7!} = 0.028$

  – R bitartez:

  ```
  >dbinom(0,7,0.4)
  [1] 0.0279936
  ```

  Probabilitatea txikiegia da.

- Saiatzen gara egun bat gehituz: 8 egun (X: euri egunak $\sim B(n = 8, p = 0.4)$):

  P[konpondu] = P[gehienez 1 euri egun (egunetatik] $= P[X \leq 1] = P[X = 0] + P[X = 1] = 0.4^0 0.6^8 \dfrac{8!}{0!8!} + 0.4^1 0.6^7 \dfrac{8!}{1!7!} = 0.106$

  – R bitartez:

  ```
  > pbinom(1,8,0.4)
  [1] 0.1063757
  ```

  Garabia 8 egunez harturik ere ez gara heltzen 0.9ko probabilitatera.

- Egun bat gehiago hartzen du: 9 egun (X: euri egunak $\sim B(n = 9, p = 0.4)$):

  P[konpondu] = P[gehienez 2 euri egun 9 egunetatik] $= P[X \leq 2] = P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] = 0.23$

  – R bitartez:

  ```
  > pbinom(2,9,0.4)
  [1] 0.231787
  ```

- Eta horrela 0.9ko probabilitatera heldu arte. R bitartez, aurreko balioen sekuentzia jarraituz:

```
> x=0:15
> y=7:22
> x
 [1]  0  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 13 14 15
> y
 [1]  7  8  9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
> pbinom(x,y,0.4)
 [1] 0.0279936 0.1063757 0.2317870 0.3822806 0.5327742 0.6652086 0.7711560
 [8] 0.8498599 0.9049526 0.9416811 0.9651873 0.9797184 0.9884371 0.9935341
[15] 0.9964467 0.9980778
```

Teilatua bukatzeko 0.9ko ziurtasun-mailara 15 egunekin heltzen gara.

0.99ko probabilitatera heltzeko egun gehiago behar ditugu, noski: 20 egun, hain zuzen.

[35] Bezero batek 10 piezako loteak erosten dizkio enpresa bati. Bezeroak pieza guztiak aztertzen ditu aurretik eta lotean pieza akastun bat aurkitzen badu, lotea atzera botatzen du. Pieza bat akastuna izateko probabilitatea %15 da. Urtean erosten dituen 25 loteetatik %20 baino gehiago atzera botatzen baditu, kontratua eten egiten du.

1. **Zenbat da kontratua eteteko probabilitatea?**
2. **Zenbat izan behar da pieza bat akastuna izateko probabilitatea lotea atzera botatzeko probabilitatea 0.30 izan dadin gehienez?**

(a)

Lehenbizi lote bakoitza atzera botatzeko probabilitatea kalkulatu behar da ($X : akastunak \sim B(n = 10, p = 0.15)$).

$$P[lotea\ atzera] = P[X \geq 1] = 1 - P[X = 0] = 1 - 0.15^0 0.85^{10} \frac{10!}{0!10!} = 0.804$$

Eta orain kontratua eteteko probabilitatea (Y: atzera botatako loteak $\sim B(n = 25, p = 0.804)$):

$$P[kontratua\ eten] = P[Y > 25 \times 0.2] = P[Y > 5] = 1 - P[Y \leq 5] \approx 1$$

(b)

$$P[lotea\ atzera] = P[X \geq 1] = 1 - P[X = 0] = 1 - p^0(1-p)^{10} \frac{10!}{0!10!} = 0.3$$

$$(1-p)^{10} = 0.7 \rightarrow 10 \ln(1-p) = \ln 0.7 = -0.35 \rightarrow \ln(1-p) = -0.035 \rightarrow 1 - p = exp(-0.035) \rightarrow p = 0.035$$

Itzuli-aldiak

---

[37] Urtean uholde bat izatearen itzuli-aldia 8 urtekoa bada, zer da probableagoa 6 urtera: uholdea gertatzea ala ez gertatzea?

Urte batean uholdea gertatzeko probabilitatea itzuli-alditik kalkulatzen dugu:

$$p = \frac{1}{ia} = \frac{1}{8}$$

6 urtetan uholdea ez gertatzeko probabilitatea honela kalkulatzen da, X izanik uholdeko urteak:

$$P[\text{uholderik ez}] = P[X = 0] = \left(\frac{1}{8}\right)^0 \left(\frac{7}{8}\right)^6 \frac{6!}{0!6!} = \left(\frac{7}{8}\right)^6 = 0.4487$$

Uholdea gertatuko da 6 urtera, 6 urte horietatik gutxienez batean uholdea gertatzen denean:

$$P[\text{uholdea}] = P[X \geq 1] = P[X = 1] + P[X = 2] + \cdots + P[X = 6] = 0.5513$$

Ohartu behar da bi probabilitateak osagarriak edo aurkakoak direla, bien batura 1 izan behar dela alegia. Beraz, bat kalkulatuta, bestea aise kalkula daiteke.

[38] Eraiki berri den zubi bat botako duen lurrikara batez beste 1000 urtetan behin gertatzen dela uste da. (a) Zenbat da zubiak 100 urtera zutik irauteko probabilitatea?

Urte batean zubia botako lurrikara gertatzeko probabilitatea honela kalkulatzen da:

$$p = \frac{1}{ia} = \frac{1}{1000} = 0.001$$

100 urtera zutik irauteko 100 urte horietan lurrikararik ez da gertatu behar. 100 urtetan zehar lurrikara gertatzen den urte kopurua X izendatuz:

$$P[X = 0] = 0.001^0 0.999^{100} \frac{100!}{0!100!} = 0.999^{100} = 0.9047$$

(b) Zenbat urtetarako iraungo du zubiak zutik 0.95eko probabilitateaz?

Zubiak 0.95eko probabilitateaz zutik iraungo duen urte kopurua aurreko atalekoa baino txikiagoa izango da noski. 0.9047 atera zaigun lekuan, 0.95 jarriz, eta 100 ordez, n:

$$0.999^n = 0.95 \to n \ln 0.999 = \ln 0.95 \to n = \frac{\ln 0.95}{\ln 0.99} = 51.26$$

n (urte kopurua) zenbaki osoa izan behar denez, zuhur jokatzearren, 51 urtekoa da soluzioa. Hau da, 0.95eko probabilitateaz ziurta daiteke 51 urtera zubiak zutik iraungo duela.

Banaketa binomialarekin loturiko proba estatistikoak

---

[42] Iaz gertatu ziren 15 istripuetatik, 10 istripu jaiegunetan izan ziren. Jaiegunetan istripuak ugariagoak direla esan al daiteke? Adierazgarritasun-maila: %1. Urtean 82 jaiegun izan ziren.

Egun denak berdinak badira istripu maiztasunari buruz, istripu jakin bat jaiegun batean suertatzeko probabilitatea p=82/365 da.

Galdetzen denaren aurkakoa hartzen da hipotesi nulu moduan:
$\mathbf{H_0}$: jaiegunetan istripuak lanegunetan bezain ugariak (edo are eta urriagoak) : $\mathbf{p \leq \frac{82}{365}}$

Datuek erakusten dutenari erreparatuz ere (hirugarren irizpidea), hipotesi hori hartu behar dugu abiapuntutzat. Izan ere, ebidentziak istripu bat jaiegun batean suertatzeko probabilitatea $\frac{10}{15} = 0.66$ dela erakusten du, egun guztiak berdinak balira baino askoz ere proportzio handiagoa. Hartara, zuhurtasunez eta aurrekoan bezalaxe, $\mathbf{H_0 : p \leq \frac{82}{365}}$ hartuko da hipotesi nulutzat.

Orain, hipotesi nulupean, $p = \frac{82}{365}$ harturik alegia (muga balioa hartzen baita kalkuluak egiteko), gertatutakoa *edo hori baino harrigarriagoa* denaren probabilitatea kalkulatzen da. Jaiegunetan istripuak *asko* direlako harritzen gara ($10 > \frac{82}{365} \cdot 15 = 3.37$); eta beraz frogaren norabidea *goitik* egongo da.

15 istripuetatik jaiegunetan izandako istripu kopurua honela banatzen da: $X \sim B\left(n = 15, p = \frac{82}{365}\right)$, betiere hipotesi nulupean. Beraz,

$$P[X \geq 10] = 0.0003 < \alpha \to H_0 \textit{ baztertu}$$

Probabilitatea honela kalkulatu da R softwarean:

```
> 1-pbinom(9,15,82/365)
[1] 0.0003156147
```

Beraz, ebidentzia nahikoa dago istripuak jaiegunetan ugariagoak direla baieztatzeko.

[43] Lantegi batean 4 langile ari dira lanean. Egunero 6na pieza egin dituzte. Egun batean egindako 24 piezetan 6 akastun suertatu dira. Kepak akastun bakarra egin du. Piezak beste langileek baino hobeki egiten dituela ondorioztatu behar al da? Adierazgarritasun-maila: %1.

---

p: pieza akastun bat Kepak egindakoa izateko probabilitatea
X: Kepak egindako pieza akastunak

Langile guztiak berdinak badira, pieza akastuna Kepak egindakoa izateko p probabilitatea 1/4=0.25 da.

Galdetzen denez (eta datuek ere horrela erakusten dutenez) langile zaharrak hobeki egiten duela besteek baino, aurkakoa hartzen da hipotesi nulutzat, okerrago egiten duela alegia, pieza akastun gehiago egiten duela besteek baino:

$$H_0 : p \geq 0.25$$

Ebidentziak ere pieza akastun bat Kepak egindakoa izateko probabilitatea $\frac{1}{6} = 0.16$ dela erakusten du baita ere; beraz, aurreko hipotesi nulua irizpide horren arabera ere zuzena da.

Orain, hipotesi nulupean, $p = 0.25$ harturik beraz, gertatutakoa *edo hori baino harrigarriagoa* denaren probabilitatea kalkulatzen da. Kepak egindako pieza akastunak *gutxi* direlako harritzen gara ($1 < 0.25 \times 6 = 1.25$); eta beraz, probaren norabidea *behetik* egongo da.

Kepak egindako pieza akastunak honela banatzen dira: $X \sim B(n = 6, p = 0.25)$, betiere hipotesi nulupean. Beraz,

$$P[X \leq 1] = 0.53 > \alpha \rightarrow H_0 \textit{ onartu}$$

Probabilitatea honela kalkulatu da R softwarean:

```
> pbinom(1,6,0.25)
[1] 0.5339355
```

Beraz, ebidentzia nahikoa ez dago Kepak akastun gehiago egiten dituela baieztatzeko, eta jarraitzen dugu onartzen langile guztiak berdinak direla.

[44] Paketeak entregatzen dituen enpresa bateko ibilbide bat programatzerakoan, pakete bat A puntuan entregatu behar izateko probabilitatea 0.09 dela suposatu da, ez gehiago ez gutxiago. Azken 14 paketeetatik 4 A puntuan entregatu behar izan dira. Birprogramazioa egin behar dela erabaki behar al da? Adierazgarritasun maila: %1. Zein da adierazgarritasun-maila txikia finkatzearen ondorioa? Zergatik uste duzu ezarri dela hemen alfa txikia?

Egin ditzagun kalkulu azkar batzuk: jasotako azken datuen arabera, paketeen 4/14=%28.57 entregatzen da A puntuan, normalean %9 izaten den bitartean. Beraz, badirudi %9ko portzentaje hori (ez gehiago, ez gutxiago) ez dela betetzen. Beraz, hipotesi nulu gisa, bete egiten dela suposatuko dugu hasiera batean:

$$H_0 : p = 0.09$$

Hipotesi nulua baztertuko dugu A puntuan **pakete asko nahiz gutxi** entregatzen direnean. Horrek esan nahi du hipotesi nulua bi aldeetatik, goitik nahiz behetik baztertu egiten dugu, eta beraz proba estatistikoa alde bikoa dela (ingelesez, *two-sided test*; gaztelaniaz, *contraste bilateral*). Horren ondorioz, **adierazgarritasun mailaren erdia ($\alpha/2$) jartzen dugu mutur bakoitzean**. Datuek erakusten dutenez, baztertzekotan goitik baztertuko dugula hipotesi nulua; beraz, alde horretatik kalkulatzen dugu p-balioa edo gertatu denaren probabilitatea (X: A puntuan entregatzen paketeak 14tik):

$$P[X \geq 4] = \{X \sim B(n = 14, p = 0.09)\} = 0.0314 > \alpha/2 \rightarrow H_0 \ \textit{onartu}$$

Beraz, A puntuan ohikoa denaren pakete kopuru desberdinak entregatzen direla baieztatzeko arrazoi nahikorik ez dago.

Alfa txikiagoa finkatzen denean, garbi dago hipotesi nulua baztertzea zailagoa dela, alegia ebidentzia sendoagoa eskatzen dela hipotesi nulua baztertzeko. Izan ere, alfa txikiago batekin, p-balioa are eta txikiagoa izan behar dena (gertatu dena arraroagoa izan behar da) hipotesi nulua baztertzeko.

Alfa txikia finkatuko da hipotesi nulua baztertzearen ondorio praktikoak larriak direnean, baztertze hori eragozteko. Kasu honetan, esan liteke hipotesi nulua baztertuta, entrega-lanaren sistema informatikoa aldatu beharko litzateke, eta horrek kostu handia dakar.

[45] Denda bateko larunbateko salmenta batzuk jaso ziren 2017 urtean:

46-87-56-64-55-67-64-65-72-75-98

Mediana 60 den probatu ezazu, balio kritikoa nahiz p-balioa baliatuz. Adierazgarritasun-maila: %10.

Balio kritikoaren metodoa

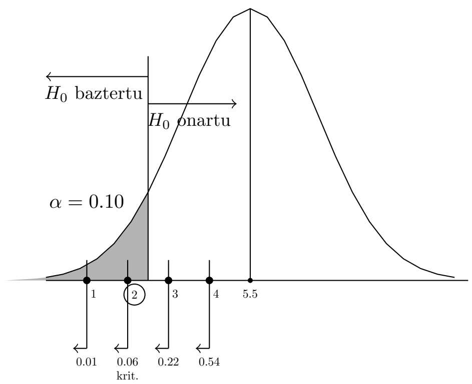
Zeinuak: -+-+-++++++

$r^- = 3;\ r^+ = 8 \rightarrow r = 3$

Iruzkin bat (ez da beharrezkoa ebazpenerako): hipotesi nulua (Me=60) guztiz egia balitz, $r = 11/2 = 5.5$ izango genuke.

Balio kritikoa $(n = 11, \alpha = 0.10)$: $r^* = 2$

$\boxed{r = 3 > r^* = 2 \rightarrow H_0 : Me = 60\ onartu}$



p-balioaren metodoa

$$
\begin{aligned}
p = P[r \leq 3] &= P[r=0] + P[r=1] + P[r=2] + P[r=3] \\
&= P[< Me, 0; > Me, 11] + P[< Me, 1; > Me, 10] + P[< Me, 2; > Me, 9] + P[< Me, 3; > Me, 8] \text{(edo alderantziz!)} \\
&= \left(0.5^0 \cdot 0.5^{11} \cdot \frac{11!}{0!11!} + 0.5^1 \cdot 0.5^{10} \cdot \frac{11!}{1!10!} + 0.5^2 \cdot 0.5^9 \cdot \frac{11!}{2!9!} + 0.5^3 \cdot 0.5^8 \cdot \frac{11!}{3!8!}\right) \times 2 = 0.22
\end{aligned}
$$

$\boxed{p > \alpha \rightarrow H_0 : Me = 60\ onartu}$

[47] Test batean izandako puntuazioak jaso dira:

67-78-75-81-82-77-72-69-87-75

Medianarako %90eko eta %80ko konfiantza tarteak eratu itzazu.

Lagin tamaina: 10.

Beraz, $B(n = 10, p = 0.5)$ banaketaren probabilitate metatuak kalkulatu behar dira. Probabilitate sinpleak ematen ditugu lehenbizi:

$P[X = 0] = 0.5^0 \cdot 0.5^{10} \cdot \frac{10!}{0!10!}$
$P[X = 1] = 0.5^1 \cdot 0.5^9 \cdot \frac{10!}{1!9!}$
$P[X = 2] = 0.5^2 \cdot 0.5^8 \cdot \frac{10!}{2!8!}$
....
$P[X = 10] = 0.5^{10} \cdot 0.5^0 \cdot \frac{10!}{10!0!}$

R bidez:

```
> x=0:10
> round(dbinom(x,10,0.5),digits=4)
 [1] 0.0010 0.0098 0.0439 0.1172 0.2051 0.2461 0.2051 0.1172 0.0439 0.0098
[11] 0.0010
```

Eta orain metatu egiten ditugu:

```
> cumsum(round(dbinom(x,10,0.5),digits=4))
 [1] 0.0010 0.0108 0.0547 0.1719 0.3770 0.6231 0.8282 0.9454 0.9893 0.9991
[11] 1.0001
```

Probabilitate metatuak zuzenean ere eman ditzakegu:

```
> round(pbinom(x,10,0.5),digits=4)
 [1] 0.0010 0.0107 0.0547 0.1719 0.3770 0.6230 0.8281 0.9453 0.9893 0.9990
[11] 1.0000
```

Datuak ordenatu: 67, 69, 72, 75, 75, 77, 78, 81, 82, 87

%90 konfiantza tarte baterako, %5 uzten dugu mutur bakoitzean. Hartzen dugu gehienez %5eko probabilitatea azpitik uzten duen lehen balioa eta berdina goiko muturrarentzat: lehen balioa azpitik uzten duena gehienez %5 $x = 1$ da. $x + 1 = 2$ hartzen dugu, eta beraz 2gn txikiena eta handiena hartzen ditugu: 69 eta 82.

Beraz, $(1 - 2 \times 0.0107) =$ %98ko konfiantzaz populazioko mediana 69-82 tartean dagoela esan daiteke.

Eman dezagun orain %80ko konfiantza tartea. %10 uzten dugu mutur bakoitzean. Hortik, $x = 2$ eta orduan $x + 1 = 3$. Orduan, 3garren txikiena eta handiena hartzen ditugu eta horrela $(1 - 2 \times 0.0547) =$ %89ko konfiantzaz populazioko mediana 72-81 tartean egongo dela esan ahal izango dugu.

Ohartarazi behar da konfiantza zenbat eta handiagoa ezarri, tarte orduan eta zabalagoa eskuratzen dela.

[50] Ontzi batean 20 pieza akastun eta 80 pieza akasgabe daude. 5 pieza erauzten dira zoriz eta batera.

1. **Kalkulatu 3 pieza akastun izateko probabilitatea, koefiziente binomialen bitartez nahiz probabilitate sinpleak bidertuz.**
2. **Zenbatekoa da akastun kopuruaren itxaropen matematikoa?**
3. **Kalkulatu emaitza posible guztien probabilitateak. Moda kalkulatu aurreko emaitzak ikusiz zein formula erabiliz.**
4. **Adierazi eta kalkulatu (a) atalean kalkulatutako probabilitatearen probabilitate simetriko guztiak.**
5. **Kalkulatu bariantza eta alderatu 5 piezak itzuleraz aukeratuko balira suertatuko liratekeen pieza akastunen bariantzarekin.**
6. **Kalkulatu piezen %60 akastuna izateko probabilitatea, 5 pieza nahiz 25 pieza aterata, eta emaitzak alderatu.**

(c)

```
> x=0:5
> round(dhyper(x,20,80,5),digits=4)
[1] 0.3193 0.4201 0.2073 0.0478 0.0051 0.0002
```

Moda beraz, $x = 1$ akastun da, probabilitate handieneko balioa.

(f)

Pentsa liteke bi probabilitateak berdinak direla, finean pieza akastunen portzentaje berdinari buruz ari garelako kasu bietan. Baina ez da horrela:

- $P[5 \text{ piezatik } \%60 \text{ akastun}] = P[X = 5 \times 0.6 = 3] = 0.0478$, aurreko atalean eman dugunez.
- $P[25 \text{ piezatik } \%60 \text{ akastun}] = P[X = 25 \times 0.6 = 15] = 0.000000006428355$.

Bi probabilitateak aski desberdinak dira, portzentajea bietan berdina izan arren. Lehen kasuan, probabilitatea askoz ere handiagoa da: ohartu behar da piezen %60 akastuna zerbait harritzekoa dela berez, akastunak ontzian %20 delako. Eta harritzekoa den zerbait gertatzeko probabilitatea beti da probableagoa pieza gutxi aterata (5, hain zuzen) pieza asko aterata baino (25, hain zuzen)(arrazoi beragatik, txanpona botata posible da 10etik 8 ”kara”ateratzea, baino askoz ere zailagoa 10etik 80 ”kara”ateratzea).

Oharra: Honela kalkulatu da azken probabilitatea:

```
> dhyper(15,20,80,25)
[1] 1.052585e-07
```

[53] Makina batean 4.2 matxura gertatzen dira orduko batez beste eta zoriz.

(a) Zenbat da 2 ordutan matxurarik ez izateko probabilitatea?

Matxurak zoriz gertatzen direnez, Poisson banaketa erabil daiteke horien kopuruen probabilitateak kalkulatzeko.

Orduko lambda parametroa ematen digute. 2 orduko lambdari buruz galdetzen digutenez, lambda ere egokitu behar da, proportzionalki: $\lambda_{2\ ordu} = 8.4$-

Orain, eskatutako probabilitatea kalkulatzen da:

$$P[matxurarik\ ez] = P[X=0] = \frac{e^{-8.4}8.4^0}{0!} = 0.00022$$

R softwareaz,

```
> dpois(0,8.4)
[1] 0.0002248673
```

(b) Kalkulatu ordu batean 2, 3, 4 eta 28 matxura izateko probabilitateak, hurrenez hurren. Emaitzak interpretatu.

$\lambda = 4.2$ hartu behar da orain, orduko probabilitateak eskatzen dizkigutenez. Probabilitateak formula hau aplikatuz kalkulatzen dira, $x = 2, 3, 4, 28$ balioetarako:

$$P[X=x] = \frac{e^{-4.2}4.2^x}{x!}$$

R softwareaz berehala eskuratzen ditugu emaitzak:

```
> x=c(2,3,4,28)
> dpois(x,4.2)
[1] 1.322610e-01 1.851654e-01 1.944237e-01 1.389321e-14
```

Irakurketa zaila denez, hiru dezimal hartzeko agindu daiteke:

```
> round(dpois(x,4.2),digits=3)
[1] 0.132 0.185 0.194 0.000
```

$x = 28$ balioaren probabilitatea ez da 0, 1.38×10^{-14} baizik, hau 0.000...000138, 1 zifra 14. dezimala izanik.

Interpretazioari dagokionez, probabilitateak λ baliora hurbildu ahala gehitzen doazela ikusten dugu, logikoa denez, λ parametroak batezbestekoa adierazten baitu. $x = 28$ balioaren probabilitatea txiki-txikia da, λ-tik urrun gaudelako.

(c) 22 minutuko lan bat egin behar da. Zenbatekoa da lana egin ahal izateko probabilitatea?

Lana burutu ahal izango da, 22 minutuko epean matxurarik ez badago. Horren probabilitatea kalkulatzeko, λ parametroa 22 minutuko epera egokitu behar da, proportzionalki:

$$\lambda = \frac{22}{60} \times 4.2 = 1.54$$

Eta hortik: $P[X=0] = \frac{e^{-1.54}1.54^0}{0!} = 0.21$

R-rekin:

```
> dpois(0,1.54)
[1] 0.2143811
```

(d) Zenbat da 2 ordutan 3 matxura edo gutxiago izateko probabilitatea?

2 orduko epeari dagokion lambda hau da: $\lambda = 8.4$.

$$P[X \leq 3] = P[X=0] + P[X=1] + P[X=2] + P[X=3]$$

Probabilitate hauek 0,1,2,3 balioak formula honetan ezarri kalkulatzen ditugu:

$$P[X=x] = \frac{e^{-8.4}8.4^x}{x!}$$

R-rekin berehalakoa da kalkulua: probabilitateak gehituz nahiz zuzenean egin daiteke:

```
> x=0:3
> dpois(x,8.4)
[1] 0.0002248673 0.0018888855 0.0079333192 0.0222132938
> sum(dpois(x,8.4)) #probabilitateen baturaz
[1] 0.03226037
> ppois(3,8.4) #zuzenean
[1] 0.03226037
```

(e) Zenbat da 2 ordutan 8 matxura edo gehiago izateko probabilitatea?

$\lambda = 8.4$ harturik:

$$P[X \geq 8] = P[X = 8] + P[X = 9] + \cdots$$

Poisson banaketan balio posibleak infiniturainoluzatzen direnez, kalkulua ezin da era horretan eskuz egin. Beste era honetan ordea, bai:

$$P[X \geq 8] = 1 - P[X \leq 7] = 1 - (P[X = 7] + P[X = 6] + \cdots + P[X = 0])$$

Probabilitate horiek $P[X = x] = \dfrac{e^{-8.4}8.4^x}{x!}$ formularekin kalkulatzen dira.

Rrekin aukera batzuk ditugu kalkulua egiteko:

```
> 1-ppois(7,8.4)
[1] 0.6013482
> ppois(7,8.4,lower.tail=F)
[1] 0.6013482
```

(f) Zenbat da 2 orduko matxura kopurua 10 eta 15 artean, biak barne, izateko probabilitatea?

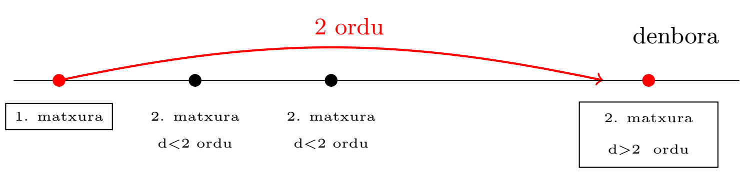
$$P[10 \leq X \leq 15] = P[X \leq 15] - P[X \leq 9] = P[X = 10] + P[X = 11] + \cdots + P[X = 15]$$

```
> ppois(15,8.4)-ppois(9,8.4)
[1] 0.321555
> x=10:15
> sum(dpois(x,8.4))
[1] 0.321555
```

(g) Zenbat da matxura batetik bestera 2 ordu gutxienez izateko probabilitatea?

Denborari buruz galdetzen digute, baina Poisson banaketa kopuruetarako erabiltzen da. Beraz, Poisson baliatu ahal izateko denbora kopuru terminoetan jarri beharko dugu.

Izan ere, irudian ikusten denez, lehen matxura gertatu den unetik, hurrengo 2 orduetan matxurarik ez izateko, 2 ordu horietako matxura kopurua 0 izan behar da:



Beraz,

$$P[T > 2\ ordu] = P[X_{2\ ordu} = 0] = \frac{e^{-8.4}8.4^0}{0!} = 0.0002$$

(i)

Sail komertzialak bezeroen epeak betetzeko inposatzen dion ekoizpen-erritmoa arindu nahian, ekoizpen-arduradunak tailerrean erritmo biziarekin jarraitzeko ezintasuna agerian jarri nahiko du, horretarako matxura kopurua handia dela, zehatzago hainbat baino handiagoa, adieraziz, eta hori probabilitate handiarekin (gutxienez, 0.9):

$$P[X > x] \geq 0.9$$

```
> x=0:8
> ppois(x,4.2,lower.tail=F)
[1] 0.98500442 0.92202300 0.78976201 0.60459663
0.41017298 0.24685711 0.13253600 0.06394334 0.02793219
```

Ikusten denez, ekoizpen-zuzendariak matxura bat baino gehiago izaten duela ziurta dezake 0.9ko gutxieneko probabilitateaz. 0.99ko ziurtasun-mailarekin, berriz, ezin du ziurtatu, probabilitate hori ez baita inongo baliotarako heltzen.

[55] Denda berri batean kaxara bezeroak zoriz eta independentziaz heltzen direla uste da, minutuko batez-bestekoa 6 bezero izanik. Bezeroa bakoitzari kobratzeko 2 minutu ematen direla uste da. Kaxan zenbat langile jarri behar dira bezeroek itxaron behar ez izateko probabilitatea 0.9 izan dadin?

---

9 kaxako langile izanda, adibidez, 10 bezero inguratzen badira kobratzea luzatzen den 2 minututan zehar, ilara sortu eta bezeroek itxaron egin beharko dute. Beraz, itxaron behar ez izateko, bezero kopurua kaxako langileen kopurua baino txikiagoa edo berdina izan beharko da 2 minututan zehar. Formalizatuz, X 2 minutuko bezero kopurua eta x kaxako langile izanik:

$$P[\text{itxaron beharrik ez}] = P[X \leq x] = 0.9$$

Aski da x aurkitzeko, 2 minutuko $\lambda = 12$ harturik, balio ezberdinetarako azpiko probabilitateak kalkulatu eta 0.9 gainditzen duen lehen balioa hatzeman. Intuitiboki, itxaron behar izateko ziurtasun handia bilatzen denez, kaxa-langileak 2 minututan batez beste etortzen diren 12 bezeroak baino gehiago izan beharko dira. $x = 13$-tik aurrerako balioekin probatuz:

```
>ppois(13:20,12)
[1] 0.6815356 0.7720245 0.8444157 0.8987090 0.9370337 0.9625835 0.9787202 [8] 0.9884023
```

Eta horrela, kaxa-langile kopurua 17 izan beharko da helburua betetzeko.

---

[56] Ekoizpen prozesu batean akastuna suertatzeko probabilitatea 0.0022 da. 4000 piezako lote bat saldu da, baina 6 akastun baino gehiago izanez gero itzuli egingo da.

1. **Zenbatekoa da lotea itzultzeko probabilitatea? Kalkulatu banaketa binomialaz eta Poisson banaketaz. Zein da lambda parametroaren esanahia?**
2. **1000 piezetan, zenbat akastun ziurta daitezke gehienez 0.9ko probabilitateaz?**
3. **Zenbat akastun ziurta daitezke bezero baten ikuspuntutik probabilitate berdinarekin?**

(a)

Loteko akastun kopurua honela banatzen da: $B(n = 4000, p = 0.0022)$. n handia eta p txikia denez, banaketa binomiala Poisson banaketaz hurbildu daiteke:

$$B(n = 4000, p = 0.0022) \to P(\lambda = np = 4000 \times 0.0022 = 8.8)$$

$\lambda = 8,8$ dugu, hau da, 4000 piezako 8.8 akastun daude batezbeste.

Banaketa binomiala baliatuz, probabilitatea hau da:

$$\begin{aligned}
P[\text{lotea itzuli}] = P[X > 6] =& P[X = 7] + \ldots + P[X = 4000] \\
&= 1 - (P[X = 6] + P[X = 5] + \ldots + P[X = 0]) \\
&= 1 - \left(0.0022^6 \cdot 0.9978^{3994} \cdot \frac{4000!}{3994!6!} + 0.0022^5 \cdot 0.9978^{3995} \cdot \frac{4000!}{3995!5!} + \ldots + 0.9978^{4000}\right) \\
&= 0.7747
\end{aligned}$$

Eta Poisson baliatuz,

$$\begin{aligned}
P[\text{lotea itzuli}] = P[X > 6] = P[X = 7] + \ldots + (\infty) &= 1 - (P[X = 6] + P[X = 5] + \ldots + P[X = 0]) \\
&= 1 - \left(\frac{e^{-8.8}8.8^6}{6!} + \frac{e^{-8.8}8.8^5}{5!} + \ldots + \frac{e^{-8.8}8.8^0}{0!}\right) \\
&= 0.7744
\end{aligned}$$

Ikusten denez, Poisson hurbilketaz sortzen den errorea oso txikia da.

Kalkuluak R-n egiteko aginduak hauek dira:

```
> pbinom(6,4000,0.0022,lower.tail=F)
[1] 0.7746894
> ppois(6,8.8,lower.tail=F)
[1] 0.7743897
```

(b)

1000 piezako akastun kopurua honela hurbildu daiteke:

$$B(n = 1000, p = 0.0022) \to P(\lambda = np = 1000 \times 0.0022 = 2.2)$$

Errazago: 4000 piezako 8.8 akastun badaude, 1000 piezako 8.8/4=2.2 izango dira batezbeste, proportzionaltasunez.

Ziurtatu beharreko akastun kopuruak hau bete behar du:

$$P[X \leq x] \geq 0.9$$

Probabilitate bakunak eta metatuak kalkulatzen joan gaitezen, $P(\lambda = 2.2)$ banaketatik, $P[X = x] = \dfrac{e^{-2.2} 2.2^x}{x!}$ formularen bitartez:

x	$P[X = x]$	$P[X \leq x]$
0	0.1108	0.1108
1	0.2437	0.3545
2	0.2681	0.6227
3	0.1966	0.8193
4	0.1081	**0.9275**
5	...	...

Beraz, ziurtatzen den akastun kopurua 4 da, 0.9275eko probabilitateaz.

(c)

Bezero baten ikuspuntutik $P[X > x]$ gisako probabilitateak kalkulatu nahiko dira (edo $P[X \geq x]$ baita), saltzaileari erakusteko akastun *asko* ekoizten dela:

x	$P[X = x]$	$P[X \leq x]$	$P[X > x]$
0	0.1108	0.1108	0.8892
1	0.2437	0.3545	0.6455
2	0.2681	0.6227	0.3773
3	0.1966	0.8193	0.1807
4	0.1081	0.9275	0.0725
5	...	...	

Ikusten denez, ez da posible $P[X > x] = 0.9$-ko probabilitatera heltzea, eta ondorioz bezeroak ezin du ziurtatu akastun kopurua kopuru bat baino handiagoa izango dela 0.9ko probabilitatearekin. Gehienez, akastun kopurua 0 baino handiagoa izango dela ziurta dezake 0.8892ko probabilitatearekin.

[57] Langile batek urtebetean lan istripu bat izateko probabilitatea 0.0012 da.

1. **Batez beste zenbat istripu gertatzen dira 1000 langileko?**
2. **Enpresa bateko lantegietan 3400 langile daude eta 7 istripu izan ziren urte batean. Lantegi horietan lan-segurtasuna besteetan bezain egokia ez dela esateko arrazoirik ba al da? Adierazgarritasun-maila: %5.**

(a)

1000 langileren artean gertatzen den istripu kopurua honela banatzen da:

$$B(n = 1000, p = 0.0012) \to P(\lambda = np = 1.2)$$

banatzen da. Itxaropena $\lambda = np = 1.2$ istripu dugu, eta horixe dugu batezbestekoa, 1000 langileko betiere.

(b)

3400 langileko istripu kopurua $3.4 \times 1.2 = 4.08$ litzateke. 7 gertatu dira azkenik, batezbestekoa baino gehiago, eta galderan planteatu bezala, lan-segurtasuna kolokan dagoela pentsatu behar da, baina zuhurtasunez kontrakoa, istripu kopurua batez beste ez dela gehitu alegia, istripuak ez direla ugariagoak eta beraz lan-segurtasuna bestetan bezain egokia dela, planteatu behar da hipotesi nulu gisa:

$$H_0 : \lambda \leq 4.08$$

Gertatua *asko* da, $7 > 4.08$ dugunez, *arraroa goitik* dago; beraz, probaren norabidea eskubiranzkoa da:

$$P[X \geq 7/\lambda = 4.08] = 1 - P[X \leq 6] = 0.1191$$

Gertatuaren probabilitatea adierazgarritasun-maila baino handiagoa da. Hortaz, H_0 onartu eta istripu-tasa ez dela gehitu erabaki behar da.

---

[58] Urtean uholde bat izatearen itzuli-aldia 8 urtekoa da.

(a) **Zer da probableagoa 6 urtera, uholdea gertatzea ala ez gertatzea?**

(b) **Zenbat urtera da uholdea izateko probabilitatea uholderik ez izateko probabilitatearen berdina?**

$\boxed{\text{(a)}}$

Itzuli-aldiaren definiziotik: $\lambda_{8 \text{ urte}} = 1$

Eta 6 urteko epe batera aldatuz, proportzionalki: $\lambda_{6 \text{ urte}} = 0.75$

Probabilitateak kalkula ditzagun:

$$P[\text{uholdea ez gertatu}] = P[X = 0] = \frac{e^{-0.75}0.75^0}{0!} = 0.4724$$

Eta beraz:

$$P[\text{uholdea gertatu}] = 1 - P[\text{uholdea gertatu}] = 1 - 0.4724 = 0.5276$$

Beraz, probableagoa da uholdea gertatzea.

$\boxed{\text{(b)}}$

Epea da ezezaguna, eta beraz, lambda parametroa ere bai. Uholdea ez izateko probabilitatea 0.5 izatea nahi dugunez:

$$P[X = 0] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda} = 0.5$$

Logaritmoak hartuz:

$$\ln e^{-\lambda} = \ln 0.5 \rightarrow \lambda = -\ln 0.5 = 0.69$$

Eta lambda parametro horri dagokion epea hau da, hirukoaren erregela sinplea batez: $t = 8 \times 0.69 = 5.52$ urte.

[59] Eraiki berri den zubi bat botako duen lurrikara batez beste 1000 urtetan behin gertatzen dela uste da.

1. **Zenbat da zubiak 100 urtera zutik irauteko probabilitatea?**
2. **Zenbat urtetarako iraungo du zubiak zutik 0.95eko probabilitateaz?**

(a)

Itzuli-aldiaren definiziotik:

$$\lambda_{1000 \text{ urte}} = 1$$

Eta 100 urteko epe batera aldatuz, proportzionalki:

$$\lambda_{100 \text{ urte}} = 0.1$$

Zubiak 100 urtera zutik iraungo badu, epe horretan ez da lurrikararik izan behar:

$$P[X = 0] = \frac{e^{-0.1} 0.1^0}{0!} = 0.9048$$

(b)

Aurreko ataleko emaitza ikusita, 0.95eko probabilitateaz 100 urte baino gutxiagorako izango dugu zubia, erdira gutxi gora-behera, intuitiboki pentsatuta, %10eko arriskua erdira murriztu behar denez:

$$P[X = 0] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda} = 0.95$$
$$\lambda = -\ln 0.95 = 0.05129$$

Hirukoaren erregelaz:
$100 \rightarrow \lambda = 0.1$
$t \quad \rightarrow \lambda = 0.05129$

Eta hortik, $t = 51.29$ *urte*.

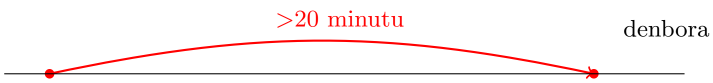
[60] Makina batek segurtasunezko geldialdiak izaten ditu. Orduko batez beste 2 geldialdi izaten dela uste da, zoriz eta independentziaz.

1. **Zenbat da ondoz ondoko geldialdien arteko denbora 20 minutu baino luzeagoa izateko probabilitatea? Minututan nahiz ordutan burutu itzazu kalkuluak.**
2. **Zenbat da hurrengo geldialdia izan arteko denbora 20 minutu baino luzeagoa izateko probabilitatea?**
3. **Zenbat da denbora hori 20-30 minutu bitartekoa izateko probabilitatea?**

---

[1]

Geldialdiak zoriz eta independentziaz gertatzen badira, geldialdi kopurua Poisson banaketaren araberakoa izango da, eta horien arteko denbora esponentzialaren araberakoa.



[Ordutan]

$$\lambda = 2 \; orduko$$

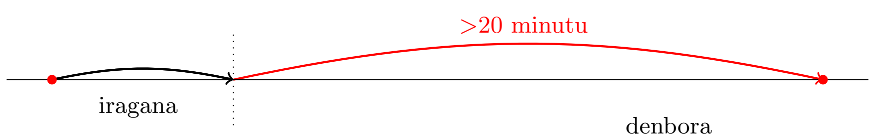
$$P[X > 20min] = P[X > \frac{20}{60}h] = P[X > 0.33h] = e^{-2\times 0.33} = e^{-0.66}$$

[Minututan]

$$\lambda = 2 \; orduko \rightarrow \lambda = \frac{2}{60} \; minutuko$$

$$P[X > 20min] = e^{-\frac{2}{60}\times 20} = e^{-0.66}$$

[2]



Banaketa esponentzialean independentzia dago aurretik gertatu denarekiko. Beraz, ez du axola zenbat denbora pasa den azken geldialditik, eta hartara hurrengo geldialdia izan arteko denboraren probabilitate berdina izango da. Beraz, probabilitatea aurreko atalekoarekin berdina da.

---

[62] Webgune batek erabat zoriz eta batez beste 4 bezeroren bisitak hartzen ditu orduko. Webgunea 40 minutuz hondaturik geratu da. Zenbatekoa da epe horretan bezero bat gutxienez galdu izanaren probabilitatea? Bi modutara ebatzi behar da: bezero kopuruari buruz zein bezeroen arteko denborari buruz.

Bezero-kopuruari buruz

40 minutu horietan gutxienez bezero bat etortzen denean galduko dira bezeroak. 40 minutuko λ parametroa $\frac{40}{60} \times 4 = 2.66$ dela jakinik:

$$P[X \geq 1] = 1 - P[X = 0] = 1 - \frac{e^{-2.66} 2.66^0}{0!} = 1 - e^{-2.66}$$

Denborari buruz

40 minutuko epean gutxienez bezero bat galduko da, hurrengo bezeroa sartu arteko denbora 40 minutu baino txikiagoa denean. $\lambda = \frac{4}{60}$ dugunez minutuko (denbora minututan jarriko dugunez):

$$P[X < 40] = F(x = 40) = 1 - e^{\frac{4}{60}\times 40} = 1 - e^{-2.66}$$

[63] Kaxa batera bezeroen etorrera zoriz eta independentziaz gertatzen dela uste da. Bezero bat etorri bitarteko denboraren batezbestekoa 5 minutukoa da. Hurrengo bezeroa 20 minutura heldu da. 5 minutuko batezbestekoa kolokan jartzeko moduko zantzua al da? Adierazgarritasun maila: %1.

Bezeroen etorrerak gertaera puntualak izanik, zoriz eta independentziaz gertatzen direnez, Poisson prozesu bat daukagu aurrean. Orduan, bezero kopurua Poisson banaketaren araberakoa izango da, eta bezeroen arteko denbora banaketa esponentzialaren araberakoa.

Ematen den datua denboraren batezbestekoa da, $\frac{1}{\lambda}$. Hortik batezbesteko kopurua kalkula daiteke:

$$\frac{1}{\lambda} = 5min \rightarrow \lambda_{1min} = \frac{1}{5}$$

Hurrengo bezeroa etorri arteko denbora honela banatzen da, beraz, kondizio normaletan:

$$X \sim Exp\Big(\lambda = \frac{1}{5}\Big)$$

Hurrengo bezeroa 20 minutura etorri dela ikusita, bezeroen arteko tartea handitu den galdetzen da, hots, bezero gutxiago etortzen diren. Hipotesi nulu gisa aurkakoa hartuko dugu, alegia tartea ez dela handitu ($\frac{1}{\lambda} \leq 5min$ edo bestela esanda, bezeroak lehen bezala edo maizago etortzen direla ($\lambda \geq 5$):

$$H_0 : \frac{1}{\lambda} \leq 5min : \ \lambda_{1min} \geq \frac{1}{5} \ bezero$$

$$p \ balioa = P[\text{gertatu dena eta areago}] = P\Big[X > 20/\lambda = 1/5\Big] = e^{-\frac{1}{5}\times 20} = 0.018$$

p-balioa adierazgarritasun-maila baino handiagoa denez, hipotesi nulua, hots 5 minutuko batezbestekoa, onartu egin behar da, hau da, hurrengo bezeroa 20 minutura etorri izana ez da ebidentzia aski sendoa baieztatzeko bezeroen arteko tartea handitu edo bezero gutxiago etortzen dela.

[64] Zerbitzu baterako etorreren batez besteko kopurua 1.4 da minutuko, erabat zoriz.
(a) Nola banatzen da 4garren etorrera bitarteko denbora?
(b) Zenbat da 4garren etorrera bitartean 15 minutu baino gehiago izateko probabilitatea?
(c) Kalkula itzazu 4garren etorrera bitarteko denboraren batezbestekoa eta bariantza.

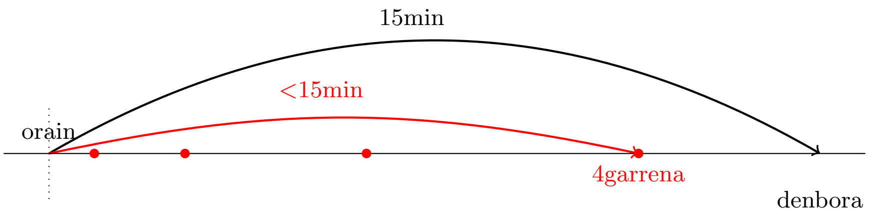
(a)

Batez besteko kopurua ematen digute, hots, lambda parametroa: $\lambda = 1.4$ minutuko.

4garren etorrera bitarteko denbora minututan X izendatuz:

$$X \sim \Gamma(k = 4, \lambda = 1.4)$$

(b) $X > 15min$ izango da 15 minutu horietan 4 etorrera baino gutxiago daudenean. Zergatik? 15 minutu horietan 4garren etorrera bat (edo gehiago) balitz, 4garren etorrera bitarteko denbora 15 minutu baino txikiagoa bailitzateke:



X 4garren etorrera bitarteko denbora da beraz, eta Y izendatzen dugu 15 minututan gertatzen den etorrera kopurua. Y 15 minutuko etorrera kopurua $P(\lambda = 1.4 \times 15 = 21)$ banatzen dela jakinik:

$$\begin{aligned} P[X > 15min] = P[Y < 4] = P[Y \leq 3] &= P[Y = 0] + P[Y = 1] + P[Y = 2] + P[Y = 3] \\ &= \frac{e^{-21}21^0}{0!} + \frac{e^{-21}21^1}{1!} + \frac{e^{-21}21^2}{2!} + \frac{e^{-21}21^3}{3!} \end{aligned}$$

Probabilitate hori R softwareaz erraz kalkulatzen da:

```
> ppois(3,21)
[1] 1.354245e-06
```

(c)

$$X \sim \Gamma(k = 4, \lambda = 1.4): \ \mu = \frac{k}{\lambda} = \frac{4}{1.4} = 2.85min; \ \sigma^2 = \frac{k}{\lambda^2} = \frac{4}{1.4^2}min^2$$

[65] Bezero batetik bestera 4 minutu igarotzen dira batez beste, bezeroak erabat zoriz heltzen direlarik.
(a) Zenbat da 2garren bezeroa heldu bitartean 5 minutu baino gehiago izateko probabilitatea?
(b) Zenbat da 6garren bezeroa heldu bitartean 15 minutu baino gutxiago izateko probabilitatea?
(c) Zenbat da 6garren bezeroa heldu bitarteko denboraren batezbestekoa eta bariantza?

Hurrengo bezeroa heldu bitarteko denbora ematen digute, hots, esponentzialaren itxaropena:

$$\frac{1}{\lambda} = 4min \rightarrow \lambda_{1min} = \frac{1}{4}$$

(a)

2garren bezeroa bitarteko denbora minututan ($X \sim \Gamma(k = 2, \lambda = 1/4)$) 5 minutu baino luzeagoa izango da, 5 minutu horietan bezero kopurua (Y) 2 baino gutxiago datorrenean, orduan 2. bezeroa 5 minutuko epetik kanpo etorriko delako. Beraz, 5 minutuko bezero kopurua $P(\lambda = \frac{1}{4} \times 5 = \frac{5}{4} = 1.25)$ banatzen dela jakinik:

$$\begin{aligned} P[X > 5min] = P[Y < 2] = [P[Y \leq 1] &= P[Y = 0] + P[Y = 1] \\ &= \frac{e^{-1.25}1.25^0}{0!} + \frac{e^{-1.25}1.25^1}{1!} \end{aligned}$$

Probabilitate hori R softwareaz erraz kalkulatzen da:

```
> ppois(1,1.25)
[1] 0.6446358
```

(b)

6garren bezeroa bitarteko denbora (($X \sim \Gamma(k = 6, \lambda = 1/4)$)) 15 minutu baino laburragoa izango da, 15 minutu horietan bezero kopurua (Y) 6 edo gehiago datorrenean, orduan 2. bezeroa 15 minutuko epearen barruan etorriko delako. Beraz, 15 minutuko bezero kopurua $P(\lambda = \frac{1}{4} \times 15 = 3.75)$ banatzen dela jakinik:

$$P[X < 15min] = P[Y \geq 6] = 1 - P[Y \leq 5] = P[Y > 5]$$

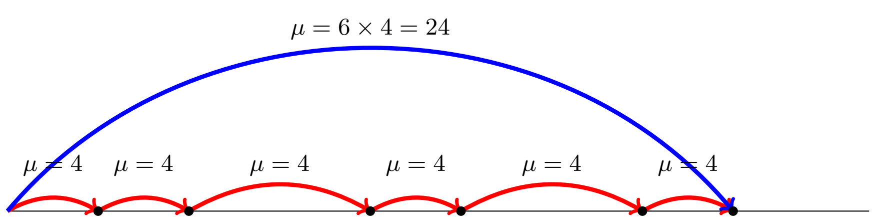
Aurreko adierazpenean emandako bi eratara kalkula dezakegu probabilitatea R softwarean:

```
> 1-ppois(5,3.75)
[1] 0.1771172
> ppois(5,3.75,lower.tail=F)
[1] 0.1771172
```

$P[Y > 5]$ eran jarrita, Thorndike nomogramaz eman daiteke probabilitatea.

(c)

Batezbestekoa erabat logikoa da: 6garren bezeroa etorri bitarteko denbora bitarteko bezero batetik bestera dauden batez besteko denbora guztien batura izango da. Nola bezero batetik bestera 4min dauden batez beste, orduan 6. bezeroa bitartean batez beste $6 \times 4 = 24$min izango dira. Bariantzarekin berdin pentsa daiteke.



Formulaz berriz,

$$X \sim \Gamma(k = 6, \lambda = 1/4): \; \mu = \frac{k}{\lambda} = \frac{6}{1/4} = 24min; \; \sigma^2 = \frac{k}{\lambda^2} = \frac{6}{(1/4)^2}min^2$$

[66] Denda bateko eguneko garbigailu salmentak banaketa uniforme diskretuaren araberakoak dira, 0-9 bitartean.
(a) Kalkulatu egun batean 3 garbigailu edo gutxiago saltzeko probabilitatea.

Honela banatzen dira eguneko salmentak, jakinik 10 balio ezberdin daudela, 0tik 9ra:

$$P[X = x_i] = \frac{1}{10}\ ;\ x_i = 0, 1, \ldots, 9$$

Beraz,

$$P[X \leq 3] = P[X = 0 + P[X = 1] + P[X = 2] + P[X = 3] = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = 0.4$$

Edota , jakinik 3 4gn balio posiblea dela: $P[X \leq 3] = \dfrac{i}{n} = \dfrac{4}{10}$

(b) Kalkulatu egun batean batez beste saltzen den garbigailu kopuruaren itxaropena eta bariantza

---

$$X \sim U(0, 1, \ldots, 9) \begin{cases} \mu = \dfrac{0+9}{2} = 4.5 \\ \sigma^2 = \dfrac{(9-0+2)(9-0)}{12} = \dfrac{99}{12} \end{cases}$$

(c) Kalkulatu 4 egunetako salmenta kopuruaren sekuentzia jakin bat suertatzeko probabilitatea (adibidez, 2,6,1,8). Sekuentziako egun kopurua, maximoa eta minimoa adierazi.

Sekuentzia batean, datuak ETA ($\times$) operadoreaz daude loturik (2 eta 6 eta 4 eta 8):

$$P[2, 6, 1, 8] = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10000}$$

Sekuentzia 4 egunekoa da ($n = 4$), eta hartan minimoa eta maximoa 1 eta 8 dira, hurrenez hurren.

(d) Kalkulatu zenbatekoa den 4, 5, eta 6 egunetan, hurrenez hurren, saldutako garbigailu kopuru maximoa 8 izateko probabilitatea, aurreko sekuentzian bezala.

$\boxed{\text{n=4 egunetan}}$

Kontuan harturik 8 maximoa i=9garren balio posiblea dela:

$$P[X_{max} = 8] = \left(\frac{i}{N}\right)^n - \left(\frac{i-1}{N}\right)^n = \left(\frac{9}{10}\right)^4 - \left(\frac{8}{10}\right)^4 = 0.2465$$

$\boxed{\text{n=5 egunetan}}$

$$P[X_{max} = 8] = \left(\frac{9}{10}\right)^5 - \left(\frac{8}{10}\right)^5 = 0.26281$$

$\boxed{\text{n=6 egunetan}}$

$$P[X_{max}=8]=\left(\frac{9}{10}\right)^6-\left(\frac{8}{10}\right)^6=0.269297$$

8 balioa banaketaren 9 maximotik gertu dago, eta beraz, gero eta aukera handiagoak daude maximo horretara gerturatzeko egun kopurua handitu ahala.

(e) Dendako langileak egunero 7 garbigailu bakarrik kudea ditzake. Zenbatekoa da egun batean gutxienez lana burutu ezinik suertatzeko probabilitatea, 4 egunetan zehar?

Lana burutu ezinik geratuko da gutxienez egun batean salmenta denean 8 edo 9 denean: horren probabilitatea 0.2 da. 4 egunetatik gutxienez batean ezinik suertatzeko probabilitatea banaketa binomialarekin planteatzen dugu, jakinik ezinik ibiltzen den X egun kopurua $B(n=4,p=0.2)$ banatzen dela:

$P[\text{gutxienez egun batean ezin}]=P[X=1]+P[X=2]+P[X=3]+P[X=4]=1-P[X=0]=1-0.8^4=0.5904$

Bide luzetik joanda, horrela kalkulatuko genuke: adibidez, $P[X=1]=0.2^1\cdot 0.8^4\cdot\frac{4!}{3!1!}$

Formula erabiliz berriz, kontuan hartuz 7 banaketaren $i=8$garren balioa dela, eta ezinik ibiliko dela 4 egunetako maximoa 8 edo handiagoa denean:

$$P[X_{max}\geq 8]=1-P[X_{max}\leq 7]=1-\left(\frac{8}{10}\right)^4=0.5904$$

(d) Kalkulatu zenbatekoa den 4, 5, eta 6 egunetan, hurrenez hurren, saldutako garbigailu kopuru minimoa 1 izateko probabilitatea, aurreko sekuentzian bezala.

---

n=4 egunetan

Kontuan harturik 2 minimoa i=3garren balio posiblea dela:

$$P[X_{min}=1]=\left(\frac{N-(i-1)}{N}\right)^n-\left(\frac{N-i}{N}\right)^n=\left(\frac{10-(2-1)}{10}\right)^4-\left(\frac{10-2}{10}\right)^4=0.2465$$

n=5 egunetan

$$P[X_{min}=1]=\left(\frac{10-(2-1)}{10}\right)^5-\left(\frac{10-2}{10}\right)^5=0.26281$$

n=6 egunetan

$$P[X_{min}=1]=\left(\frac{10-(2-1)}{10}\right)^6-\left(\frac{10-2}{10}\right)^6=0.269297$$

1 balioa banaketaren 0 minimotik gertu dago, eta beraz, gero eta aukera handiagoak daude 0ra gerturatzeko egun kopurua handitzen denean. Tarteko kopuruetarako ordea, bilakaera hori ez da finkoa.

(g) Dendan egun batean dirua galtzen dela uste da, 2 garbigailu edo gutxiago saldu direnean. Zenbatekoa da egun batean gutxienez galerak izateko probabilitatea, 4 egunetan zehar?

Galerak izango dira gutxienez egun batean salmenta denean 0, 1 edo 2: horren probabilitatea 0.3 da. 4 egunetatik gutxienez batean galerak suertatzeko probabilitatea banaketa binomialarekin planteatzen dugu, jakinik galerak dauden X egun kopurua $B(n = 4, p = 0.3)$ banatzen dela:

$P[\text{gutxienez egun batean galdu}] = P[X = 1] + P[X = 2] + P[X = 3] + P[X = 4] = 1 - P[X = 0] = 1 - 0.7^4 = 0.7599$

Bide luzetik joanda, horrela kalkulatuko genuke: adibidez, $P[X = 1] = 0.3^1 \cdot 0.7^4 \cdot \dfrac{4!}{3!1!}$

Baita ere, zuzeneko formula erabiliz, kontuan hartuz galerak izango direla gutxienez egun batean minimoa 2 edo txikiagoa denean:

$$P[X_{min} \leq 2] = 1 - P[X_{min} \geq 3] = 1 - \left(\frac{N-(i-1)}{N}\right)^n = 1 - \left(\frac{10-(4-1)}{10}\right)^4 = 0.7599$$

(h) Zenbat egun behar dira salmenta maximoa 9 izan dadin 0.95eko probabilitateaz? Eta 9 edo txikiagoa izan dadin?

- 9 balioa 10garren balioa da banaketan ($i = 10$):

$$P[X_{max} = 9] = \left(\frac{i}{N}\right)^n - \left(\frac{i-1}{N}\right)^n = \left(\frac{10}{10}\right)^n - \left(\frac{9}{10}\right)^n = 1 - 0.9^n = 0.95$$

$$1 - 0.9^n = 0.95 \to 0.9^n = 0.05 \to n \ln 0.9 = 0.05 \to n = \frac{\ln 0.05}{\ln 0.9} = 28.43 \to 29 \; egun$$

- 9 edo txikiagoa izan dadin 0.95eko probabilitateaz berriz, aski da 1 egun, seguru baita egun batean, bitan edo n-tan, maximoa 9 edo txikiagoa izango dela.

(i) Zenbat egun behar dira salmenta maximoa 8 izan dadin 0.95eko probabilitateaz? Eta 8 edo handiagoa izan dadin?

- 8 balioa 9garren balioa da banaketan ($i = 9$):

$$P[X_{max} = 8] = \left(\frac{i}{N}\right)^n - \left(\frac{i-1}{N}\right)^n = \left(\frac{9}{10}\right)^n - \left(\frac{8}{10}\right)^n = 0.95$$

Ekuazioa ebazten aski zaila da (logaritmoak hartuz ere ez: $\ln(a-b) \neq \ln a - \ln b$). Beraz, n balio ezberdinetarako saiatzen gara R softwarearekin:

```
> n=seq(1,20,by=1)
> 0.9^n-0.8^n
 [1] 0.1000000 0.1700000 0.2170000 0.2465000 0.2628100 0.2692970 0.2685817
 [8] 0.2626951 0.2532028 0.2413043 0.2279113 0.2137101 0.1992110 0.1847875
[15] 0.1707068 0.1571545 0.1442538 0.1320802 0.1206737 0.1100474
```

Ez da posible 0.95era iristea. Eskatutako probabilitatea $n = 6$ egunetarako heltzen da bere maximora.

- $P[X_{max} \geq 8] = P[X_{max} = 8] + P[X_{max} = 9] = \left[\left(\frac{9}{10}\right)^n - \left(\frac{8}{10}\right)^n\right] + \left[\left(\frac{10}{10}\right)^n - \left(\frac{9}{10}\right)^n\right] = 0.95$

Rz ebatziz:

```
> n=1:20
> (0.9^n-0.8^n)+(1-0.9^n)
 [1] 0.2000000 0.3600000 0.4880000 0.5904000 0.6723200 0.7378560 0.7902848
 [8] 0.8322278 0.8657823 0.8926258 0.9141007 0.9312805 0.9450244 0.9560195
[15] 0.9648156 0.9718525 0.9774820 0.9819856 0.9855885 0.9884708
```

Beraz, $n = 14$ egunetarako heltzen gara 0.95eko probabilitatera.

(j) Zenbaterainoko garbigailu salmentak beharko lirateke, betiere banaketa uniforme diskretuaren arabera, 4 egunetan zehar maximoa 15 edo handiagoa izateko probabilitatea 0.95 izateko? Eta probabilitatea 0.8 izateko? Eta 8 egunetan zehar, probabilitate biekin?

---

n=4,p=0.95

$$P[X_{max} \leq x_i] = \left(\frac{i}{N}\right)^n$$

$$P[X_{max} \geq 15] = 1 - P[X_{max} \leq 14] = 1 - \left(\frac{15}{N}\right)^4 = 0.95$$

$$1 - \left(\frac{15}{N}\right)^4 = 0.95 \rightarrow \ln N = \ln 15 - \frac{\ln 0.05}{4} = 3.45 \rightarrow N = 31.5 \rightarrow 32$$

Beraz, salmenta maximoak 31 beharko luke izan.

n=4,p=0.8

$$\ln N = \ln 15 - \frac{\ln 0.2}{4} = 3.11 \rightarrow N = 22.42 \rightarrow 23$$

Beraz, salmenta maximoak 22 beharko luke izan.

n=8,p=0.95

$$\ln N = \ln 15 - \frac{\ln 0.05}{8} = 3.08 \rightarrow N = 21.75 \rightarrow 22$$

Beraz, salmenta maximoak 21 beharko luke izan.

n=8,p=0.8

$$\ln N = \ln 15 - \frac{\ln 0.2}{8} = 2.90 \rightarrow N = 18.17 \rightarrow 19$$

Beraz, salmenta maximoak 18 beharko luke izan.

Ondorio gisa, esan daiteke aiseago heltzen garela balio maximo batera egun gehiagorekin (dadoa gehiagotan botata) eta kopuru posible handiena gehitzen denean (dadoari aldeak gehitzen zaizkionean).

[67] Ikastetxe bateko ikasle guztiak 1etik 222rako zenbakiak dituen zerrenda batean daude. Kalkulatu 26-36-67-197 lagina suertatzeko probabilitatea, zorizko laginketa sinpleaz, itzuleraz nahiz itzulerarik gabe.

Itzuleraz, banaketa uniforme diskretua erabiltzen dugu, ikasle guztiek, zenbaki guztiei, probabilitate berdina dutelako: 1/222:

$$P[26,36,67,197] = \frac{1}{222} \cdot \frac{1}{222} \cdot \frac{1}{222} \cdot \frac{1}{222} = \left(\frac{1}{222}\right)^4$$

Itzulerarik gabe, banaketa hipergeometrikoa erabiltzen dugu, jakinik eskolan 222 ikasle daudela eta 4 aukeratzen ditugula, eta aukeratzen ditugun 4 horiek 26-26-67-197 izan behar direla:

$$P[26,36,67,197] = \frac{\binom{4}{4}\binom{218}{0}}{\binom{222}{4}} = \frac{1}{\binom{222}{4}}$$

[69] Gai batek datorren urterako izango duen prezio igoera 0-10 puntu bitartekoa izango dela uste da, bestelako informaziorik gabe.

(a) Zenbat da igoera 6 baino handiagoa izateko probabilitatea (arrazoituz nahiz kalkulua eginez)? Adierazi grafikoki probabilitate hori.

(b) Otsailerako 2 puntuko igoera izan bada, zenbat da igoera urtearen amaieran 6 baino handiagoa izateko probabilitatea?

(c) Zenbateko igoera espero da batez beste (arrazoituz nahiz kalkulatuz)?

(d) Zenbat da prezio igoeraren bariantza?

(a)

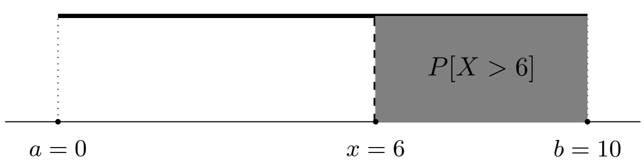
Igoera 0-10 puntu bitartean izango dela beste ezer ez dakigunez, igoerako balio posible guztiei, 0-10 bitartean, probabilitate berdina ematen diegu, eta beraz eredu moduan $U(0, 10)$ hartzen dugu.

Banaketa funtzioa erabiliz hau da eskatutako probabilitatea:

$$P[X > 6] = 1 - F(x = 6) = 1 - \left[\frac{6-0}{10-0}\right] = 0.4$$

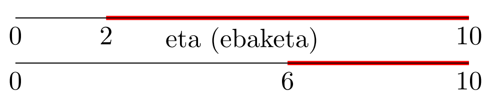
Arrazoituz ere eman daiteke probabilitatea; balio guztiek probabilitate berdina dutelarik, 6tik gorako balioek hartzen duten tartearen luzera 4 denez, eta luzera osoa 10-0=10, probabilitatea 4/10=0.4 da.

Grafikoki adierazita hau da eskatutako probabilitatea:



(b)

$$P[X > 6/X > 2] = \frac{P[X > 6 \; eta \; X > 2]}{P[X > 2]} = \frac{P[X > 6]}{P[X > 2]} = \frac{0.4}{0.8} = 0.5$$



(c)

$$\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{0+10}{2} = 5$$

Emaitza intuitiboa da: 0tik 10era bitarteko balio guztiek probabilitate berdina badute, itxaropena erdi-erdian egongo da.

(d)

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(10-0)^2}{12} = 8.33$$

[70] $\mathbf{X \sim U(0,8)}$. Kalkulatu z, $\mathbf{P[X > \mu_X + z] = 0.1}$.

$$\mu_X = \frac{0+8}{2} = 4$$

$$f(x) = \frac{1}{8}$$

$$P[X > 4+z] = 0.1 \rightarrow \int_{4+z}^{8} \frac{1}{8} dx = \left[\frac{x}{8}\right]_{4-z}^{8} = \left[\frac{8}{8}\right] - \left[\frac{4+z}{8}\right] = 0.1 \rightarrow \frac{8-(4+z)}{8} = 0.1 \rightarrow z = 3.2$$

---

[71] Frogatu behar da balio batetik beherako baldintzapeko edo moztutako banaketa uniforme bat ere uniformeki banatzen dela.

$X \sim U(a,b)$

Baldintzako balioa: x_0.

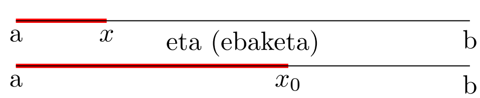
$X < x_0$ betetzen dela badakigu, garbi dago kontsideratzen den x balioa x_0 baino txikiagoa izan behar dela.

$$F(y) = F(x/X < x_0) = P[X < x/X < x_0] = \frac{P[X < x \; eta \; X < x_0]}{P[X < x_0]} = \frac{P[X < x]}{P[X < x_0]} = \frac{F(x)}{F(x_o)} = \frac{\frac{x-a}{x-b}}{\frac{x_0-a}{x-b}} = \frac{x-a}{x_0-a}$$

Deribatuz:

$$f(y) = F'(y) = \frac{1}{x_0 - a}$$

Eta dentsitate-funtzio hori $U(x_0, b)$ banaketa uniforme bati dagokio.



---

[72] Frogatu behar da, $Z \sim U(0,1)$ banaketari $X = a + (b-a)Z$ aldagai-aldaketa aplikatuz gero, X zorizko aldagaia $U(a,b)$ banatzen dela.

$f(z) = 1 \rightarrow F(z) = z$

$X = a + (b-a)Z \rightarrow Z = \dfrac{X-a}{(b-a)}$

$$F(x) = P[X < x] = P\left[Z < \frac{x-a}{b-a}\right] = \frac{x-a}{b-a} \rightarrow f(x) = \frac{1}{b-a}$$

Eta dentsitate-funtzio hori $U(a,b)$ banaketari dagokiona da.

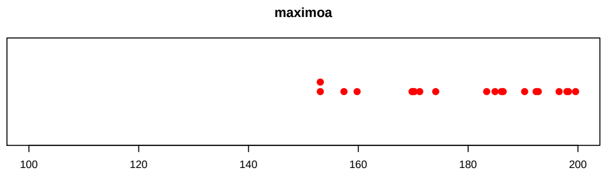
[73] Denda bateko eguneko salmentak 100-200 bitartekoak dira, baina horretaz gain erabateko ziurgabetasuna dugu.

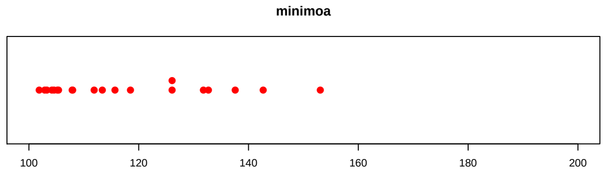
1. **Simulatu 4 eguneko salmentak.**
2. **Eman itzazu aurreko 4 eguneko segidetako salmenta maximoa, minimoa eta ibiltartea.**
3. **(a) eta (b) errepikatu 20 aldiz.**
4. **4 egunetako salmenta maximoak, minimoak eta ibiltarteak irudikatu.**
5. **Grafikoak ikusita, gutxi gorabehera zein da maximo, minimo eta ibiltarte batezbestekoa?**
6. **Kalkulatu maximoaren, minimoaren eta ibiltartearen itxaropenak edo batezbesteko teorikoak.**
7. **Azaldu logikoki aurreko emaitzak, diagrama egokia eratuz.**
8. **Aurreratu eta kalkulatu 4 eguneko salmenta maximoa 140 baino txikiagoa izateko probabilitatea.**
9. **Aurreratu eta kalkulatu 4 eguneko salmenta minimoa 180 baino handiagoa izateko probabilitatea.**
10. **Aurreratu eta kalkulatu 4 eguneko salmenten ibiltartea 10 baino txikiagoa izateko probabilitatea.** **(Soluzioa)**

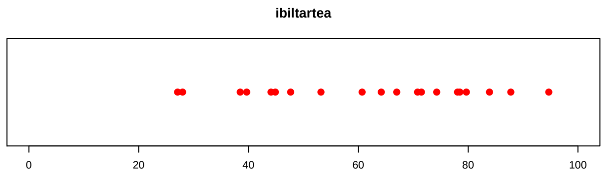
(a), (b), (c) eta (d)

R bitartez:

```
> a=matrix(round(runif(20*4,100,200),digits=1),ncol=4)
> a
      [,1]  [,2]  [,3]  [,4]
 [1,] 187.5 198.0 196.0 153.1
 [2,] 153.1 105.4 115.5 122.8
 [3,] 170.2 126.1 131.4 163.3
 [4,] 137.6 152.1 186.1 198.3
 [5,] 161.5 162.6 132.7 171.2
 [6,] 108.0 164.8 186.1 148.7
 [7,] 150.4 182.7 107.9 186.4
 [8,] 152.7 190.3 126.1 166.0
 [9,] 105.2 184.9 168.1 168.7
[10,] 183.4 132.4 176.7 111.9
[11,] 192.4 176.4 186.1 104.6
[12,] 131.8 141.7 159.8 134.5
[13,] 192.8 165.8 118.5 146.7
[14,] 139.8 184.9 101.9 196.6
[15,] 169.5 169.8 149.4 142.7
[16,] 115.7 129.7 140.1 199.6
[17,] 102.9 169.9 165.1 108.9
[18,] 104.2 157.4 147.9 135.6
[19,] 174.1 114.8 119.1 103.3
[20,] 153.1 137.4 127.1 113.4
> max=do.call(pmax, as.data.frame(a))
> max
 [1] 198.0 153.1 170.2 198.3 171.2 186.1 186.4 190.3 184.9 183.4 192.4 159.8
[13] 192.8 196.6 169.8 199.6 169.9 157.4 174.1 153.1
> min=do.call(pmin, as.data.frame(a))
> min
 [1] 153.1 105.4 126.1 137.6 132.7 108.0 107.9 126.1 105.2 111.9 104.6 131.8
[13] 118.5 101.9 142.7 115.7 102.9 104.2 103.3 113.4
> ibil=max-min
> ibil
 [1] 44.9 47.7 44.1 60.7 38.5 78.1 78.5 64.2 79.7 71.5 87.8 28.0 74.3 94.7 27.1
[16] 83.9 67.0 53.2 70.8 39.7
```







(e)

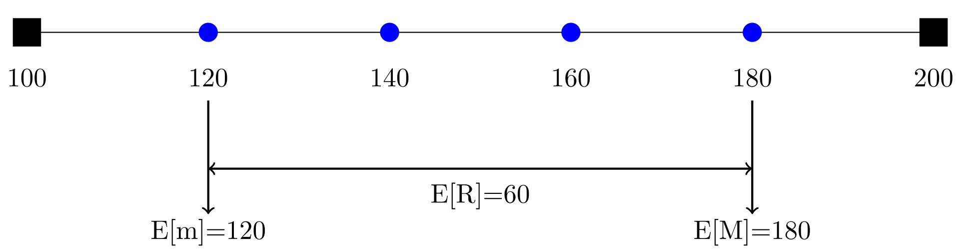
Maximoaren batezbestekoa 180 ingurukoa da, minimoarena 120 ingurukoa, eta ibiltartearena 60 ingurukoa.

(f)

$$E[M] = 100 + \frac{4 \times (200 - 100)}{4+1} = 180$$
$$E[m] = 100 + \frac{(200 - 100)}{4+1} = 120$$
$$E[R] = E[M] - E[m] = 60$$

(g)

Emaitza intuitiboa da guztiz: 4 salmentetan denetarik egongo da, handiak, ertainak eta txikiak, eta beraz idealean espero behar duguna 120, 140, 160 eta 180 izatea da, uniformean probabilitate berdintasuna izanik. Beraz, maximoa 180 izatea espero dugu, minimoa 120, eta ibiltartea 180-120=60.



(h) Simulazioetan ikus dezakegunez, ez dago 4 eguneko segida bakar bat ere maximoa 140 baino txikiagoa duenik. Horren probabilitatea oso txikia izan behar da , horretarako 4 salmentak 140 baino txikiagoak izan behar direlako, 100-200 tartekoak izan daitezkeela.

$$P[M < 140] = 0.4^4 = 0.0256$$

(i) Simulazioetan ikus dezakegunez, ez dago 4 eguneko segida bakar bat ere minimoa 180 baino handiagoa duenik. Horren probabilitatea oso txikia izan behar da , horretarako 4 salmentak 180 baino handiagoak izan behar direlako, 100-200 tartekoak izan daitezkeela.

$$P[m > 180] = 0.2^4 = 0.0016$$

$\boxed{\text{(i)}}$ Simulazioetan ikus dezakegunez, ez dago 4 eguneko segida bakar bat ere ibiltartea 10 baino txikiagoa duenik. Horren probabilitatea oso txikia izan behar da , horretarako 4 salmentak 10eko tarte batean izan behar direlako, 100-200 tartekoak izan daitezkeela.

$$P[R < 10] = 4 \times \left(\frac{10}{100}\right)^3 \times \frac{96}{100} + \left(\frac{10}{100}\right)^4 = 0.00394$$

---

[74] Denda bateko eguneko salmentak 0tik b-ra doaz, b parametro ezezaguna izanik. b estimatzeko, n egunetako salmentak jaso, eta horien maximoa hartzen da. Adibidez, 23-86-176-158 suertatzen bada, $\hat{b} = 176$ estimatuko dugu. Badakigu noski, maximo hori beti ibiliko dela benetako b-ren azpitik, eta beraz halako errore sistematikoa duela. Baina kontrolatu egin daiteke.

1. **Zenbateko errorea egiten dugu portzentajean eta batez beste 7 eguneko datuen maximoa hartzen denean b estimazio moduan?**
2. **Zenbat eguneko datuak jaso behar dira batez besteko errore-portzentaje hori gutxienez %5era murriztu nahi denean?**
3. **Zer egin beharko genuke errore hori zuzentzeko?**
4. **4 egunetan zehar 140ko maximoa suertatu eta salmentak 100-200 tartean banatzen badira uniformeki, arrazoirik ba al dago esateko salmenten b maximo absolutua 200 baino txikiagoa dela?** $\alpha = 0.1$

$\boxed{\text{(a)}}$

7 eguneko datuekin, maximoaren itxaropena hau da:

$$E[\hat{b}] = E[M] = 0 + \frac{7 \times (b - 0)}{8} = \frac{7b}{8}$$

b parametroari buruz dagoen errorea beraz hau da batez beste:

$$e = b - \frac{7b}{8} = \frac{b}{8}$$

Portzentajean: $\dfrac{b/8}{b} = \dfrac{1}{8} = 0.125 = \%12.5$

Laburrago esanda, 7 eguneko datuekin horien maximoa b baliotik %12.5 azpitik dago.

$\boxed{\text{(b)}}$

Datuak egun gehiagotan jaso beharko dira, noski.

Errorea %5 izateko, errore absolutua $b/20$ izan beharko litzateke, eta beraz maximoaren itxaropena $19b/20$. Beraz, 19 eguneko datuak beharko genituzke.

$\boxed{\text{(c)}}$

Aurreko kasuan adibidez, aski genuke errorea zuzentzeko maximoaren emaitza bider 20/19 egitea, hots b-ren estimatzaile moduan maximoa hartuz ordez, hau hartzea: $\hat{b} = \dfrac{20}{19} max$

$\boxed{\text{(d)}}$

$H_0 : U(100, \geq 200)$ (uste denaren aurkakoa)

140ko maximoa 4 egunetan gutxi da. Beraz, *harrigarria* behetik dugu (azpiko probabilitatea kalkulatzen dugu), eta proba alde bakarrekoa da alternatiboki 140ko maximoarekin banaketaren maximoa 200 ez, baizik eta txikiagoa dela erabakitzen dugulako:

$$P[M < 140] = \left(\frac{140-100}{200-100}\right)^4 = 0.0256 < \alpha$$

Beraz, $b = 200$ baztertu beharko litzateke, eta txikiagoa dela erabaki.

[80] Lantegi bateko eguneko ekoizpena banaketa normalari jarraiki banatzen da, batezbestekoa 8 tona eta desbideratzea 1 tona izanik.

1. **Zenbatekoa da lau egunetan 30 tona baino gutxiago ekoizteko probabilitatea?**
2. **Zenbateko ekoizpena ziurta daiteke lau egunetarako %90eko probabilitateaz?**
3. **Zenbat egun behar dira gutxienez 60 tonako eskaera bat burutzeko, eskaeraren epea ez betetzeko probabilitatea gehienez %15 izatea nahi bada?**
4. **Eta %1 izatea nahi bada?**
5. **Ordaindu beharreko T tributuak eguneko 12.000€ko kopuru finkoa dira alde batetik, 1000€ko kenkariarekin tona bakoitzeko. Zenbat da egun jakin bateko ekoizpenagatik 3.000€ baino gehiago ordaindu behar izateko probabilitatea?**

(e)

3.000€ baino gehiago ordainduko dira ekoizpena 9 baino txikiagoa denean, kalkulu sinple bat garatuz:

$$P[T > 3.000] = P[E < 9] = P\left[Z < \frac{9-8}{1}\right] = P[Z < 1] = 0.8413$$

Beste era batera honela planteatzen da, T tributuaren eta $\mathbf{X} \sim N(8,1)$ eguneko ekoizpenaren arteko *erlazio lineala baliatuz eta aldakuntza linealaren propietateak erabiliz*:

$$T = 12.000 - 1.000E \rightarrow T \sim N(\mu = 12.000 - 1.000 \times 8 = 4.000, \sigma = 1.000 \times 1 = 1.000)$$

Bi aldagaien batezbestekoek errespetatu egiten dute haien arteko erlazio lineala. Gehitzen den konstanteak (12.000), ordea, ez dio eragiten aldagai berriaren desbideratzeari; bidertzen den konstanteak (-1.000) baino ez dio eragiten, horren balio absolutuarekin bidertuta.

Beraz $T \sim N(\mu = 4.000, \sigma = 1.000)$ harturik eta estandartuz:

$$P[T > 3.000] = P\left[Z > \frac{3.000 - 4.000}{1.000}\right] = P[Z > -1] = P[Z < 1] = 0.8413$$

Emaitza, noski, aurrekoaren berdina da.

[81] Fakultateko igogailuan 12 pertsona sartzen dira eta gehienez 900 kg-ko pisua har dezake. Batez beste zenbat izan behar da pertsona baten batez besteko pisua, aipatutako zama gainditzeko probabilitatea 0.1 izan dadin? Pertsona baten pisuaren desbideratzea 10 kilo da.

---

12 pertsonen pisua honela banatzen da ugalkortasun-propietatearengatik, pertsonen pisuak independenteak direnez:

$$P = p_1 + p_2 + \cdots + p_n \sim N(12\mu, \sigma = \sqrt{12 \times 10^2} = 34.64)$$

900 kiloko zama gainditzeko probabilitatea 0.1 izatea nahi dugunez, eta beraz ez gainditzeko probabilitatea 0.9:

$$P[P < 900] = P\left[Z < \frac{900 - 12\mu}{34.64}\right] = 0.9 \rightarrow \frac{900 - 12\mu}{34.64} = 1.28 \rightarrow \mu = 71.30 \;\; kilo$$

[83] Ekoizpen-prozesu batean unitate bakoitza akastuna izateko probabilitatea 0.25 da. 100 unitateko lote bat osatzen da. (a) Zenbatekoa da horien artean 30 akastun edo gutxiago izateko probabilitatea? (b) Zenbat akastun espero dira? (c) Zenbatekoa da espero den akastun kopuru hori bera suertatzeko probabilitatea? (d) Zenbat akastun ziurta daitezke %90eko probabilitateaz?

(a) Unitate akastunen kopurua, X deituko dena, binomialki banatzen da, eta n handia duenez, p txikia izan gabe, banaketa normal batez hurbildu daiteke:

$$X \sim B(n = 100, p = 0.25) \to N(\mu = np = 25, \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{np(1-p)} = 4.33)$$

$$P[X \leq 30] = P[X < 30.5] = P\left[Z < \frac{30.5 - 25}{4.33}\right] = P[Z < 1.27] = 0.8979$$

Banaketa binomialaren formularen bitartez garatuta, honela egingo genuke:

$$P[X \leq 30] = P[X = 30] + ... + P[X = 0] = 0.25^{30} \times 0.75^{70} \times \frac{100!}{30!70!} + ...$$

Luzea izateaz gainera, kalkulagailuz ezingo genuke atera 100! balioa, esaterako, ezin baita konputatu. Eta horixe da, hain zuzen, De Moivre-Laplace teorema erabiltzearen abantaila, banaketa normalaren bitartez hurbilketa ona lor dezakegula kalkulu askoz sinpleago batez.

Hurbilketa ona dela ikusteko, ikus dezagun zenbat aterako litzatekeen benetan, banaketa binomialarekin alegia, baina R softwarearekin eginez:

```
> pbinom(30,100,0.25)
[1] 0.8962128
```

Ikusten denez, De Moivre-Laplace formulak ematen duen emaitza (0.8979) benetako emaitzatik oso oso hurbil dago.

(b) Itxarondako balioa $\mu = np = 25$ unitate akastun da.

(c)

Itxaropena $\mu = 25$ da.

$$P[X = 25] = P[24.5 < X < 25.5] = P\left[\frac{24.5 - 25}{4.33} < Z < \frac{25.5 - 25}{4.33}\right] = P[-0.11 < Z < 0.11] = 0.087$$

Itxaropena izateaz gainera, 25 akastun probabilitate handieneko balioa ere bada, baina horren probabilitatea ez da hain handia ere (%8). Probabilitate handiak μ inguruko tartetan daude, eta ez balio isolatuetarako, kasu honetan bezala.

(d)

Akastun kopuru bat ziurtatzea haiei buruz kopuru maximo bat ematea da, bestela eluke inongo zentzurik. Beraz,

$$P[X < x] = 0.9 \to P\left[Z < \frac{x - 25}{4.33}\right] = 0.9 \to \frac{x - 25}{4.33} = 1.28 \to x = 30.54$$

Soluzio zehatza 30.54 izanik, 30 akastun ziurta daitezkeela esatea ausartegia lizateke. Zuhurtasunez, 31 akastun edo gutxiago ziurtatzen ditugu, beraz.

[84] Enplegu publikoko eskaintza batera 1000 lagun aurkeztu dira. Lehenengo proba baztertzailea eta hura gainditzeko probabilitatea 0.6 da. Zenbat aulki prestatu behar dira bigarren probarako aulki nahikoa izateko probabilitatea 0.99 izatea nahi bada?

Zenbat motako problema da, eta beraz planteamendua egiteko onena aulki kopuru zehatz batekin proba egitea da. Batez beste $1000 \times 0.6 = 600$ lagunek gainditzen dutenez gero, 0.99ko ziurtasuna izateko 600 aulki baino gehiago beharko dira. Kalkula dezagun esaterako 700 aulkirekin nahikoa izateko probabilitatea (X: lehenengo proba gainditzen dutenak):

$$X \sim B(n = 1000, p = 0.6) \to N(\mu = 1000 \times 0.6 = 600, \sigma = \sqrt{1000 \times 0.6 \times 0.4} = 15.49)$$

700 aulki nahikoa izango dira, lehen proba gainditzen duen X hautagai kopurua 700 baino txikiagoa denean (edo berdin, gaineratu beharko genuke, baino jarraitutasun zuzenketa egingo ez dugunez, horrek ez du garrantzirik):

$$P[nahikoa] = P[X < 700] = P\left[Z < \frac{700 - 600}{15.49}\right] = P[Z < 6.45] \approx 1$$

Beraz, 700 aulkirekin soberan betetzen da helburua, eta 0.99ko probabilitatea betetzeko aulki gutxiago nahikoa izango dira. Ikus dezagun zenbatekoa den kopuru zehatza. 700 jarri dugun lekuan x jarriz:

$$P[nahikoa] = P[X < x] = P\left[Z < \frac{x - 600}{15.49}\right] = 0.99$$

Tauletan dagokion bilatuz:

$$\frac{x - 600}{15.49} = 2.32 \to x = 635.93$$

Aulki kopurua zenbaki osoa izan behar da. 635ekin motz geratuko gara eta beraz, 636 aulki beharko dira.

---

[85] Eguneko ekoizpena xaboi-lantegi batean N(100 kilo, 10 kilo) banatzen da. Zenbat da urtean, 365 egunetan, gutxienez 317 egunetan 110 kiloko ekoizpena ez gainditzeko probabilitatea?

Kalkula dezagun *egun batean* ekoizpena 110 ez gainditzeko probabilitatea:

$$P[X < 110] = P\left[Z < \frac{110 - 100}{10}\right] = P[Z < 1] = 0.8413$$

Hartara, 110 baino ekoizpen txikiagoko E egunen kopurua honela banatzen da:

$$E \sim B(n = 365, p = 0.8413) \to N(\mu = np = 365 \times 0.8413 = 307.07, \sigma = \sqrt{npq} = 6.98$$

Eta hau izango da eskatutako probabilitatea, jarraitutasun-zuzenketa eginda:

$$P[E \geq 317] = P\left[Z > \frac{317.5 - 307.07}{6.98}\right] = P[Z > 1.49] = 0.068$$

(86) Makina batean gertatzen den matxura kopurua eguneko 0.16 da batez beste Poissonen prozesu bati jarraiki. Matxurak konpontzeko pieza bana behar da aldi bakoitzean.

(a) Zenbat da 360 egunetan zehar 50 pieza baino gehiago behar izateko probabilitatea?

(b) Zenbat pieza behar dira 360 egunetako matxurak konpontzeko nahikoa izateko probabilitatea 0.99 izan dadin?

(c) 100 piezarekin zenbat egunetarako daukagu nahikoa 0.99ko probabilitateaz?

(a)

360 eguneko epari dagokion lambda parametro hau da: $\lambda = 0.16 \times 360 = 57.6$ matxura. 30 baino handiagoa denez, Poisson formula erabiltzea deserosoa da eta hobe da probabilitateak hurbiltzea banaketa normala baliatuz:

$$P(\lambda = 57.6) \rightarrow N(\mu = \lambda = 57.6, \sigma = \sqrt{\lambda} = 7.59)$$

50 pieza baino gehiago beharko dira matxura kopurua (X) 50 baino txikiagoa denean (jarraitutasun-zuzenketa baztertuz):

$$P[X > 50] = P\left[Z > \frac{50 - 57.6}{7.59}\right] = P[Z > -1] = P[Z < 1] = 0.8413$$

(b)

x pieza edukita, nahiko izango dira matxurak x baino gutxiago direnean (edo berdin):

$$P[nahiko] = P[X < x] = P\left[Z < \frac{x - 57.6}{7.59}\right] = 0.99 \rightarrow \frac{x - 57.6}{7.59} = 2.32 \rightarrow x = 75.20$$

Motz ez geratzeko, beraz, 76 pieza eduki beharko dira helburua betetzearren.

(c)

100 pieza edukita, 76 piezarekin baino denbora gehiagotarako edukiko dugu noski, 360 egun baino gehiagotarako alegia.

Kasu honetan n egun kopurua ez dugu ezagutzen, beraz matxura kopurua honela banatzen da:

$$P(\lambda = 0.16n) \rightarrow N(\mu = \lambda = 0.16n, \sigma = \sqrt{0.16n} = 0.4\sqrt{n})$$

$$P[nahiko] = P[X < 100] = P\left[Z < \frac{100 - 0.16n}{0.4\sqrt{n}}\right] = 0.99 \rightarrow \frac{100 - 0.16n}{0.4\sqrt{n}} = 2.32 \rightarrow n = 495.81$$

Kasu honetan ez dago zenbaki oso bat eman beharrik soluzio gisa, denbora zatitu egin daitekeelako, eta lambda parametroa horren arabera egokitu, baina egun osoak eman beharko balira, gehiegiz ez pasatzeko, esango genuke 495 egunetarako genukeela nahikoa, 496 egunetarako nahikoa dugula esatea ausartegia delako.

[87] Poisson banaketari jarraiki 1.4 bateria gastatzen da batez beste eguneko lantegi batean.
(a) 40 egunetan, zenbat da 50 bateria baino gehiago gastatzeko probabilitatea?

---

40 eguneko epera doitu behar da lambda parametroa:

$$\lambda_{egunbetea} = 1.4 \rightarrow \lambda_{40\ egun} = 40 \times 1.4 = 56$$

Lambda handia denez, hurbilketa normala erabil dezakegu probabilitatea kalkulatzeko (X:gastatutako bateriak):

$$P(\lambda = 56) \rightarrow N(\mu = 56, \sigma = \sqrt{56} = 7.4)$$

$$P[X > 50] = P\left[Z > \frac{50-56}{7.4}\right] = P[Z > -0.81] = 0.7911$$

(b) Zenbat bateria eduki behar dira prest 80 egunetarako nahikoa izateko probabilitatea 0.98 izan dadin?

---

80 eguneko epera doitu behar da lambda parametroa:

$$\lambda_{egunbetea} = 1.4 \rightarrow \lambda_{80\ egun} = 80 \times 1.4 = 112$$

Poisson banaketaren hurbilketa normala eginda, hau daukagu:

$$P(\lambda = 112) \rightarrow N(\mu = 112, \sigma = \sqrt{112} = 10.583)$$

Batez beste 112 bateria behar da, baina ziurtasun handia nahi dugunez bateria horiekin nahikoa izateko, kopuru handiago batekin probatzen dugu, 120 bateriarekin kasu (± 0.5 doiketa ez dugu egingo):

$$P[nahikoa] = P[X \leq 120] = P\left[Z < \frac{120-112}{10.583}\right] = P[Z < 0.75] = 0.7733726$$

120 bateria prest edukita nahikoa izateko probabilitate txikiegia da, eta beraz soluzioa handiagoa izango da. Azken probabilitatea 0.98 hartuz eta atzera eginez, b beharrezko bateria-kopurua izanik:

$$0.98 = P\left[Z < \frac{b-112}{10.583}\right] \rightarrow \frac{b-112}{10.583} = 2.05 \rightarrow b = 133.69$$

133 bateriarekin motz geratuko gara, eta beraz zuhurtasunez 134 bateria eduki beharko dira prest.

Problema zuzenean ere ebaz zitekeen, 120ko kopuruarekin probatu gabe alegia, b bateria kopuru batetik abiaturik, haiekin gastatzen den bateria kopurua b baino txikiagoa denean nahikoa izango dugula pentsatuz.

(c) Zenbat izan behar da bateria baten batezbesteko iraupena, 40 bateriarekin 60 egunetarako energia nahikoa izateko probabilitatea 0.9 izan dadin?

Egunean gastatzen den bateria kopurua λ da, eta beraz $1/\lambda$ da batezbesteko iraupena. Beraz, ezezaguna atal honetan $1/\lambda$ da.

60 eguneko λ parametroa 60λ da.

Beraz, 60 egunetan gastatzen den bateria kopurua honela banatzen da:

$$P(60\lambda) \rightarrow N(\mu = 60, \sigma = \sqrt{60\lambda} = 7.74\sqrt{\lambda})$$

60 egunetarako energia nahiko izango dugu, 40 bateria baino gutxiago gastatzen denean, eta horren probabilitatea 0.9 izatea nahi dugu:

$$P[nahikoa] = P[X < 40] = P\left[Z < \frac{40 - 60\lambda}{7.74\sqrt{\lambda}}\right] = 0.9 \rightarrow \frac{40 - 60\lambda}{7.74\sqrt{\lambda}} = 1.28 \rightarrow \lambda = 0.544$$

0.544 bateria gastatu behar da eguneko helburua betetzeko, eta beraz batez besteko iraupena horretarako 1/0.544=1.83 egunekoa izan behar da.

Limitearen teorema zentrala

[89] Finantza inbertsio batek duen eguneko kotizazioak +1, 0 eta -1€ egin dezake 0.2, 0.5 eta 0.3 probabilitateaz, hurrenik hurren.
(a) 100 egun igaro ondoren, zenbat da mozkinak izateko probabilitatea?
(b) Zenbat diru eduki behar da prestatuta 100 egunetara gerta daitezkeen galerei aurre egin ahal izateko probabilitatea 0.99 izan dadin?

(a) Ez dakigu nola banatzen **X** 100 eguneko mozkina, baina lotu dezagun eguneko mozkinarekin:

$$\mathbf{X} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}$$

Batugai bakoitzeko banaketa ezaguna dugu, batugai horiek independenteak dira elkarrekiko (egun batean irabazteak ez du esan nahi biharamunean irabazi edo galdu probabilitate handiagoz edo txikiagoz egin behar dugunik). Batugai kopurua ere aski handia da ($n > 30$). Beraz, LTZ aplika daiteke, baina horretarako batugai bakoitzaren itxaropena eta bariantza behar ditugu:

x	$p(x)$	$xp(x)$	$x^2p(x)$
-1	0.3	-0.3	0.3
0	0.5	0	0
1	0.2	0.2	0.2
	1	-0.1	0.5

$$\mu = -0.1 \ ; \ \sigma^2 = 0.5 - (-0.1)^2 = 0.49$$

Beraz, LTZ aplikatuta, honela banatzen da 100 eguneko irabazia:

$$\mathbf{X}_{100\ egun} \sim N(\mu = -0.1 \times 100 = -10, \sigma = \sqrt{0.49 \times 100} = 7)$$

Orain, eskatutako probabilitatea kalkulatzen dugu:

$$P[mozkinak] = P[\mathbf{X}_{100\ egun} > 0] = P\left[Z > \frac{0-(-10)}{7}\right] = P[Z > 1.42] = 0.077$$

(b)

Batez beste 10 euroko galerak ditugu 100 egunetan. Ia seguru (0.99ko probabilitateaz) nahi dugunez izan galera guztiak ordaintzeko nahiko diru izango dela, soluzioa 10 euro baino handiagoa izango da noski. Har ditzagun proba egiteko 11 euro. 11 euro aski izango dira, irabaziak -11 baino handiagoak direnean (berdintza ez dugu kontuan hartzen banaketa normalean):

$$P[aski] = P[X > -11] = P\left[Z > \frac{-11-(-10)}{7}\right] = P[Z > -0.14] = 0.55$$

11 eurorekin ez dugu baldintza betetzen. Diru gehiago behar da, beraz. Diru kantitate horri d deituko diogu. Probabilitatea 0.99 bihurtuz eta 11 ordez d jarriz:

$$P[aski] = P[X > -d] = P\left[Z > \frac{-d-(-10)}{7}\right] = P\left[Z > \frac{-d+10}{7}\right] = 0.99 \rightarrow \frac{-d+10}{7} = -2.32 \rightarrow d = 26.24$$

Beraz, balizko galerak 0.99 probabilitatez estaltzeko diru kopurua 26.24 euro dira.

[90] Poissonen banaketari jarraiki 1.4 bateria gastatzen da batez beste eguneko lantegi batean.
(a) 40 bateria edukita, zenbat denboratarako daukate energia nahikoa 0.99ko probabilitateaz?
(b) Zenbat bateria eduki behar dira prest 80 egunetarako nahikoa izateko probabilitatea 0.98 izan dadin?
(c) Zenbat izan behar da bateria baten batezbesteko iraupena, 40 bateriarekin 60 egunetarako energia nahikoa izateko probabilitatea 0.9 izan dadin?
Oharra: Ebazpena banaketa esponentziala baliatuz egin behar da.

Denborari buruz galdetzen duenez, baterien denbora edo iraupenari buruz planteatu behar da.

Eguneko batezbesteko *kopuruak* Poissonen banaketaren lambda parametroa adierazten du: $\lambda = 1.4$. Eguneko gastatzen den bateria kopurua *Poisson* bada, bateria baten X_i iraupena *esponentzial* izango da, honako batezbesteko eta bariantza hauekin:

$$X_i \sim Exp(\lambda = 1.4) : \mu = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1.4} = 0.71\ egun;\ \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{1.4^2} = 0.51$$

40 baterien iraupena, limitearen teorema zentralaren arabera, honela banatzen da (40 kopurua aski handia dela, 30 edo handiagoa hain zuzen, eta bateriak independenteak direlako baldintzapean):

$$\mathbf{X} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{40} \sim N(\mu = 0.71 \times 40; \sigma = \sqrt{0.51 \times 40})$$

(a) 40 bateria edukita, zenbat denboratarako daukate energia nahikoa 0.99ko probabilitateaz?

Denbora minimo bat eskatzen ari da. Izan ere, x denbora baterako energia nahikoa izango da, 40 baterien iraupena x baino handiagoa denean (hori da problemaren puntu ilun eta zailenetako bat, beraz hausnartu horri buruz). Hori gertatzeko probabilitatea 0.99 izatea nahi denez:

$$P[\mathbf{X} > x] = P\left[Z > \frac{x - 0.71 \times 40}{\sqrt{0.51 \times 40}}\right] = 0.99$$

Bere gainetik 0.99ko probabilitatea uzten balio normal estandarra -2.33 da, tauletan bilatuta:

$$\frac{x - 0.71 \times 40}{\sqrt{0.51 \times 40}} = -2.33 \to x = 17.92\ egun$$

Horrela uzten dugu, borobildu gabe, denbora jarraitua delako hemen, ez diskretua.

(b) Zenbat bateria prestatu behar dira 80 egunetarako energia nahikoa izateko probabilitatea 0.98 izan dadin? *(Ohartu 87(b) ariketaren berdina dela, baina orain Poissonekin ez, esponentzialarekin baizik ebatziko dugu.)*

Aurreko atalaren berdina da, baina 40 bateria ordez, n bateria jarriz, eta x egun ordez 80 egun.

Ezezaguna batweria kopurua da, n alegia. n bateria horien iraupena honela banatzen da, aurreko atalekoa eredutzat hartuta, 40 ordez n jarriz:

$$\mathbf{X} = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim N(\mu = 0.71n; \sigma = \sqrt{0.51n})$$

Aurrekoaren galderaren alderantzizkoa dela esango genuke. 80 eguneko iraupena ziurtatu nahi da eta horretarako behar den bateria kopurua behar da kalkulatu (80 edo iraupen handiagoa duen bateria kopurua, alegia). Beraz, lehen x zegoen lekuan 80, eta 40 zegoen lekuan n jarriko da:

$$P[\mathbf{X} > 80] = P\left[Z > \frac{80 - 0.71 \times n}{\sqrt{0.51 \times n}}\right] = 0.98$$

Bere gainetik 0.98ko probabilitatea uzten balio normal estandarra -2.06 da, tauletan bilatuta: $\frac{80-0.71n}{\sqrt{0.51n}} = -2.06$.

$n = x^2$ aldagai-aldaketa eginez, ekuazio kuadratikoa ebatziz eta soluzio negatiboa baztertuz:

$$0.71x^2 - 2.06\sqrt{0.51}x - 80 = 0 \to x = 11.65 \to n = x^2 = 11.65^2 = 136.89$$

Eta horrela, 136 bateriarekin motz geratuko garenez, 80ko iraupenera heldu gabe, 137 bateria behar dira.

(c) Zenbat izan behar da bateria baten batezbesteko iraupena, 40 bateriarekin 60 egunetarako energia nahikoa izateko probabilitatea 0.9 izan dadin?

Batezbeste 60/40=1.5 eguneko iraupena beharko genuke, baina 0.9ko ziurtasuna eskatzen denez, erantzuna handiagoa izango da.

Bateria baten batez besteko iraupena $\mu = \dfrac{1}{\lambda}$ da (eta beraz bariantza: $\sigma^2 = \dfrac{1}{\lambda^2} = \mu^2$). LTZ aplikatuz 40 bateriako multzo baterako, X iraupena totala honela banatuko da:

$$\mathbf{X} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{40} \sim N(40\mu; \sigma = \sqrt{40\mu^2} = 6.32\sqrt{\mu})$$

$$P[\mathbf{X} > 60] = P\left[Z > \frac{60 - 40 \times \mu}{6.32\mu}\right] = 0.9$$

Beraz,

$$\frac{60 - 40 \times \mu}{6.32\mu} = -1.28 \rightarrow \mu = 1.88 \; egun$$

Oharra: Ohartu z balioak negatiboa behar duela izan, gainetik 0.9 utzi behar badu.

[91] Lantegi batean batez besteko ekoizpena 146 tona da, 10 tona desbideratzearekin, banaketa zehatza ezezaguna izanik, astelehenetik ostegunera; ostiral eta larunbatetan, goizeko txandan bakarrik egin da lana eta batez besteko ekoizpena 64 tonakoa da, 6ko desbideratzearekin.

(a) Hurrengo 10 asteetan 7200 tona baino gehiago ekoizteko probabilitatea kalkulatu behar da.

(b) Zenbat aste osoko epea eman behar da 8000 tonako eskaera bat ekoitzi ahal izateko 0.96ko probabilitateaz?

(a)

Aurreko ariketak eginda, pentsa liteke LTZ beti berdinak diren banaketen baturari buruzko teorema dela, baino ez da horrela: banaketa desberdinak gehituta ere, aski izanda eta elkarrekiko independenteak, ondoriozko banaketa beti normala izango da, batezbesteko eta bariantza desberdinak gehituz besterik gabe. Ariketa honetan dago horren adibide bat.

Hurrengo 10 asteetan 40 astegun ditugu astelehenetik ostegunera (X egunak), eta 20 ostiral eta larunbat (Y egunak).

Aste horietako ekoizpen totala beraz, 60 egun horietako ekoizpenen batura izango da, aintzat hartuz bi egun mota ditugula batezbestekoari eta desbideratzeari buruz:

$$\mathbf{X} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{40} + Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{20}$$

Beraz, LTZ aplikatuz, egun ezberdinen arteko independentzia suposatuz:

$$\mathbf{X} \sim N(\mu = 146 \times 40 + 64 \times 20 = 7120; \sigma = \sqrt{10^2 \times 40 + 6^2 \times 20} = 68.7)$$

Beraz,

$$P[\mathbf{X} > 7200] = P\left[Z > \frac{7200 - 7120}{68.7}\right] = 0.122$$

(b)

Emandako probabilitaterako, arestian 10 aste jarri ordez a jarriz, eta 7200 ordez, 8000 ziurtatu nahi dugula planteatu behar da.

Emandako epean, a astetan alegia, X motako $4a$ egun daude, eta Y motako $2a$ egun. Beraz, aste horietan ekoitzitakoa honela banatzen da, LTZ baliatuz:

$$\mathbf{X} \sim N(\mu = 146 \times 4a + 64 \times 2a = 712a, \sigma = \sqrt{10^2 \times 4a + 6^2 \times 2a} = 21.72\sqrt{a})$$

Eskaera beteko da a asteko epean ekoitzitakoa 8000 edo handiagoa denean. Horren probabilitatea 0.96 izatea nahi dugunez:

$$P[\mathbf{X} \geq 8000] = 0.96$$

Estandartuz:

$$P[\mathbf{X} > 8000] = P\left[Z > \frac{8000 - 712a}{21.72\sqrt{a}}\right] = 0.96$$

Gainetik 0.94ko probabilitatea uzten duen z balioa -1.75 izanik:

$$\frac{8000 - 712a}{21.72\sqrt{a}} = -1.75$$

Ekuazioa ordenatuz:

$$712a - 38\sqrt{a} - 8000 = 0$$

$n = x^2$ aldagai-aldaketa eginez, ekuazio kuadratikoa sortzen da:

$$712x^2 - 38x - 8000 = 0$$

Eta hortik, soluzio positiboa hartuz (negatiboak desbideratze negatiboa ematen duenez baztertu egin behar baita):

$$x = 3.37 \rightarrow a = x^2 = 11.35$$

Planteatu dugun moduan a zenbaki osoa behar da izan. Sabai-balioa hartu behar da, gehiegiz borobilduz, $a = 12$ aste alegia, 11 asterekin motz geratzen garelako. Beraz, 12 asteko epea eman behar da helburua betetzeko.

[92] Makina bakoitzeko matxura kopurua 0, 1 edo 2 izan daiteke 0.2, 0.5 eta 0.3ko probabilitateaz, hurrenik hurren, gertatzen direla uste da. Haiek gutxitu nahian, mantentze-plan bati ekin zaio eta horren ondoren lantegi bateko 100 makinetan 90 matxura jaso direla ikusi da. Mantentze-plana eraginkorra izan dela esan al daiteke? Adierazgarritasun-maila :%2.

---

100 makinetako matxura kopurua honela kalkulatzen da, X_i izanik i-garren makinako matxura kopurua:

$$\mathbf{X} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$$

Makina ezberdinetako matxura kopuruak independenteak izanik, eta makina kopurua aski handia denez, LTZ aplika daiteke matxura kopuru totalari buruz. Horretarako, makina bakoitzeko matxura kopurua itxaropena eta bariantza behar ditugu:

x_i	$p(x_i)$	$x_i p(x_i)$	$x_i^2 p(x)$
0	0.2	0	0
1	0.5	0.5	0.5
2	0.3	0.6	1.2
	1	μ=1.1	$\alpha^2 = 1.7$

Hortik:

$$\mu = 1.1 \; ; \; \sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 1.7 - 1.1^2 = 0.49$$

Beraz, honela banatzen da LTZ aplikatuta matxura kopuru totala:

$$\mathbf{X} \sim N(\mu = 1.1 \times 100 = 110; \sigma = \sqrt{0.49 \times 100} = 7)$$

Galdetzen dutenaren aurkakoa hartzen da hipotesi nulutzat, hau da, mantentze-plana ez dela eraginkorra izan, eta beraz, 100 makina konpontzeko 110 ordu edo gehiago behar ditugula.

Batez beste 110 matxura gertatzen direla ikusita, 90 matxura kopuru txikia da. Txikia delako harritzen garenez, behetik kalkulatzen dugu gertatutakoaren probabilitatea:

$$P[ebidentzia/H_0] = P[\mathbf{X} < 90] = P\left[Z < \frac{90 - 110}{7}\right] = P[Z < -2.85] = 0.002$$

Suertatutako balioaren probabilitatea α baino txikiagoa denez, hipotesi nulua baztertu, matxura kopurua gutxitu eta ondorioz mantentze-plana eraginkorra izan dela pentsatzeko arrazoiak daude.

[93] Eguneko ekoizpena lantegi batean uniformeki banatzen da 10-20 tartean, kg-tan. 50 egunetan zehar, batezbesteko ekoizpena 14 izan da.
(a) Ekoizpena jaitsi egin dela esan al daiteke? Adierazgarritasun-maila: %2.
(b) Zenbat izan behar da batezbestekoa ekoizpena jaitsi dela baieztatzeko? Adierazgarritasun-maila: %2.
(c) Kalkulatu hipotesi nulua baztertzeko balio kritikoak 100 eta 500 lagin tamainetarako, eta emaitzak interpretatu.
(d) Zenbat izan behar da 50 datuen batezbestekoa, ekoizpen orokorra aldatu dela, besterik gabe, baieztatu ahal izateko? Adierazgarritasun-maila: %2.

(a)

Eguneko ekoizpena 10-20 tartean banatzen denez, batezbesteko orokorra edo itxaropena matematikoa eguneko, $\mu = 15$ da. Bereizi behar ditugu μ populazio-batezbestekoa (ohiko batezbestea, batezbestekoa orokorra edo ideala) eta $\overline{x}$, hainbat egunetan jaso ditugun datuen batezbestekoa. $\overline{x}$ erabiliko dugu, lagin datuetatik kalkulatuta, μ batezbesteko orokorra aldatu den erabakitzeko.

Horretarako, proba estatistikoa garatu behar da. Ebidentziari (kasu honetan, datuen batezbestekoari) buruzko probabilitatea kalkulatu behar denez, batezbesteko aritmetikoa nola banatzen den ezarri behar da (X_i: eguneko ekoizpena). Eta horretarako, lehenbizi nola kalkulatzen den jartzen dugu:

$$\overline{x}_{n=50} = \frac{\sum_{i=1}^{50} X_i}{50} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{50}}{50}$$

$sum_{i=1}^{50} X_i$ baturari LTZ aplika dakioke, batugai kopurua aski handia delako ($n > 30$), eta batugai horiek (ekoizpenak) egun batetik bestera independenteak direlako. LTZ aplikatzeko batugai horietako bakoitzaren itxaropena eta bariantza kalkulatu behar dira:

$$X \sim U(10,20) \begin{cases} \mu = \dfrac{10+20}{2} = 15 \\ \sigma^2 = \dfrac{(20-10)^2}{12} = 8.33 \end{cases}$$

LTZ aplikatuz orain:

$$\sum_{i=1}^{50} X_i \sim N(\mu = 15 \times 50, \sigma = \sqrt{50 \times 8.33})$$

Eta hortik lagin batezbestekoa (aurrekoa zati 50 eginez kalkulatzen dena), aldakuntza linealaren propietatea erabiliz, honela banatzen da:

$$\overline{x}_{n=50} \sim N\left(\mu = \frac{15 \times 50}{50} = 15; \sigma = \frac{\sqrt{50 \times 8.33}}{50} = \frac{\sqrt{8.33}}{\sqrt{50}} = 0.4\right)$$

Batez besteko ekoizpena 14 suertatu eta batez beste 15 dela atera dugu arestian. Beraz, batezbesteko orokorra jaitsi dela dirudienez, zuhurtasunez berdin mantendu edo igo egin dela sinetsiko dugu aurrez:

$$H_0 : \mu \geq 15$$

Izandako batezbestekoa txikia delako harritzen garenez, probaren norabidea behetikakoa da. p balioa eman dezagun, ebidentziaren probabilitatea alegia:

$$P[\overline{x}_{n=50} < 14] = P\left[Z < \frac{14-15}{0.4}\right] = P[Z < -2.5] = 0.006 < \alpha$$

Eta beraz hipotesi nulua baztertu eta horrenbestez, ekoizpena jaitsi dela erabaki daiteke.

(b)

Ekoizpena jaitsi dela baieztatu ahal izateko p-balioa 0.02 baino txikiagoa izan behar da:

$$P[\overline{x}_{n=50} < \overline{x}^*_{n=50}] = P\left[Z < \frac{\overline{x}^*_{n=50} - 15}{0.4}\right] = 0.02$$

Azpitik 0.02ko probabilitatea uzten duen puntuazio estandarra -2.05 da.

$$\frac{\overline{x}^*_{n=50} - 15}{0.4} = -2.05 \rightarrow \overline{x}^*_{n=50} = 14.18$$

Beraz, 50 egunetako batezbesteko aritmetikoa 14.18 baino txikiagoa beharko luke izan, baieztatzeko jaitsi egin dela. 14.18 balio horri *balio kritikoa* deitzen zaio, eta onarpen- eta baztertze-eremuen arteko muga da. Balio kritikoak definitzen duen baztertze-eremuari *eremu kritikoa* deitzen zaio baita ere. Kasu honetan 14 baztertze-eremuan dagoenez, hipotesi nulua baztertu eta beraz ekoizpena jaitsi dela jaitsi ondorioztatu behar da, aurreko atalean p-balioarekin erabaki dugun bezala.

Ohartarazi behar da froga garatzeko bi metodo horiek, p-balioaren metodoa eta eremu kritikoaren metodoa, ondorio berera daramatela beti, noski.

(c)

Lagin tamaina aldatzen denean, lagin batezbestekoaren itxaropena 15 da beti, aise ikus daitekeenez baina desbideratzea aldatu egiten da. Lehen 50 genuen lekuan, 100 eta 500 jarriz hurrenez hurren:

$$\overline{x}_{n=100} \sim N\left(\mu = 15; \sigma = \frac{\sqrt{8.33}}{\sqrt{100}} = 0.28\right)$$

$$\overline{x}_{n=500} \sim N\left(\mu = 15; \sigma = \frac{\sqrt{8.33}}{\sqrt{500}} = 0.129\right)$$

Ohartu behar da datu kopurua zenbat eta handiagoa izan, desbideratzeak orduan eta txikiagoak direla, datu gehiagorekin batezbestekoari buruz ziurgabetasun txikiagoa izango dugulako, ziurragoa da $\overline{x}$ batezbestekoa tarte txiki batean izango dela 15 balioaren inguruan.

Balio kritikoak eman ditzagun orain, lagin tamaina horietarako:

$$\frac{\overline{x}^*_{n=100} - 15}{0.28} = -2.05 \rightarrow \overline{x}^*_{n=100} = 14.42$$

$$\frac{\overline{x}^*_{n=500} - 15}{0.129} = -2.05 \rightarrow \overline{x}^*_{n=500} = 14.73$$

Ikusten denez, lagin tamaina handiagoetarako, eta datu gehiagorekin informazio fidagarriagoa edo seguruagoa dugulako (σ txikiagoa), ez da beharrezkoa jasotako ekoizpen datuen batezbesteko aritmetikoa hipotesi nuluaren baliotik hainbeste urruntzea, ekoizpena jaitsi dela baieztatzeko: 500 daturen batezbestekoa aski da pixka bat 15 baino txikiagoa izatea ekoizpena hortik jaitsi dela erabakitzeko, intuitiboki aurreratu daitekeen bezala.

(d)

Orain hau da hipotesi nulua, galdetzen denaren aurkakoa:

$$H_0 : \mu = 15$$

Arestiko hipotesi nulua baztertu eta $\mu = 15$-eko batezbesteko orokorra besterik gabe aldatu dela baieztatzeko, 50 egunetako $\overline{x}$ batezbestekoa *aski txikia edo aski handia*, bi aldeetako batean, izan daiteke. Eremu kritikoa, hau da, baztertze-aldea, bi muturretan dago. Kasu hauetan, *proba alde bikoa* (*two-sided test*) dela esaten da, aurreko ataletako *alde bakarreko* (*one-sided test*) proben aldean.

Horrek esan nahi du %2ko adierazgarritasun-maila bi muturretan banatu behar dela kasu honetan, %1 ezkerrean eta %1 eskubian. p-balioa kalkulatuta, gure kasuan, p=0.006, $\alpha/2$ = %1-arekin alderatu behar da oraingo honetan. $p < \alpha/2$ betetzen denez, hipotesi nulua, 15eko batezbesteko orokorra (hobe esanda, populazio-batezbestekoa) alegia, baztertzen da.

Balio kritikoaren metodoari buruz, bi balio kritiko izango dira, bata ezkerrera edo behetik eta bestea eskuinera edo goitik:

- **Ezker aldean (behetik):**

$$P[\overline{x}_{n=50} < \overline{x}^*_{n=50}] = P\left[Z < \frac{\overline{x}^*_{n=50} - 15}{0.4}\right] = 0.01$$

Azpitik 0.01eko probabilitatea uzten duen puntuazio estandarra -2.32 da.

$$\frac{\overline{x}^*_{n=50} - 15}{0.4} = -2.32 \rightarrow \overline{x}^*_{n=50} = 14.07$$

- **Eskuin aldean (goitik):**

$$P[\overline{x}_{n=50} > \overline{x}^*_{n=50}] = P\left[Z > \frac{\overline{x}^*_{n=50} - 15}{0.4}\right] = 0.01$$

Azpitik 0.01eko probabilitatea uzten duen puntuazio estandarra 2.32 da.

$$\frac{\overline{x}^*_{n=50} - 15}{0.4} = 2.32 \rightarrow \overline{x}^*_{n=50} = 15.93$$

15.93 balioa simetriaz ere kalkula daiteke zuzenean: 15+(15-14.07)=15.93.

Beraz, 50 egunetako batezbestekoa 14.07 baino txikiagoa edo 15.93 baino handiagoa denean hipotesi nulua baztertu, egun guztietako batezbesteko orokorra, μ alegia, 15 dela, eta aldatu dela erabakiko da ondorioz.

[94] Produktu bat bere bizitza-zikloaren hazkunde-fasean dago. Hileko salmentak hurrengo hilabetetik aurrera honela banatzen direla uste da: $U(800+200i, 1800+200i)$, i izanik hemendik aurrerako hilabetearen zenbakia.

(a) Kalkulatu hurrengo hiru hilabeetako bakoitzean salmenten itxaropena eta salmentak 1600€ baino handiagoak izateko probabilitatea? Interpretatu ezazu salmenten hazkundeari buruz.

(b) Zenbat da hurrengo hiru urteetan 180.000€ baino gutxiago irabazteko probabilitatea?

(a)

- Lehenengo hilabetean, $i = 1$:

$$U(1000, 2000) : \mu = 1500; P[X > 1600] = 0.4$$

- Bigarren hilabetean, $i = 2$:

$$U(1200, 2200) : \mu = 1700; P[X > 1600] = 0.6$$

- Hirugarren hilabetean, $i = 3$:

$$U(1400, 2400) : \mu = 1900; P[X > 1600] = 0.8$$

Emaitzak bat datoz adierazburuan esaten denarekin: produktua hazkunde-fasean dago, zenbat eta hilabete gehiago pasa batez besteko salmentak handiagoak dira, baita 1600 baino gehiago saltzeko probabilitatea ere.

(b)

Hurrengo hiru urteetako salmentak aztertzeko, hilabete bakoitzeko salmenten batezbestekoa eta bariantza behar ditugu:

$$U(a = 800+200i, b = 1800+200i) : \mu = \frac{a+b}{2}; \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\mu = \frac{(800+200i)+(1800+200i)}{2} = 1300+200i;$$

$$\sigma^2 = \frac{[(1800+200i)-(800+200i)]^2}{12} = \frac{1.000.000}{12}$$

Hurrengo hiru urteetan 36 hilabete daude:

$$\mathbf{X} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{36}$$

LTZ aplikatuz (batugai kopurua aski handia da eta independentzia suposatuta):

$$\mathbf{X} \sim N\left(\mu = 1500+1700+\ldots+8500 = 180.000, \sigma = \sqrt{\frac{1.000.000}{12} \times 36} = 1732\right)$$

Oharra: batezbestekoen batura serie aritmetiko baten batura da ($S_n = n(a_1 + a_n)/2$).

Batezbestekotik beherako probabilitatea 0.5 da, banaketa normala simetrikoa delako μ balioaren inguruan, eta beraz ez dago estandartu eta tauletan bilatu beharrik:

$$P[X < 180.000] = 0.5$$

Doikuntzaren egokitasunerako probak: khi-karratu proba

[95] Jogurt berri baterako lau aukera eman zaie dastatzeko 60 bezero potentzialeko talde bati eta lauetatik zein nahiago duten galdetu zaie. A, B, C eta D aukerak nahiago izan dituztenak 20, 14, 12 eta 14 dira, hurrenik hurren. Lau aukerak berdintsuak edo probabilitate berekoak direla baiezta al daiteke %10eko adierazgarritasun-maila batez?

Aukerak	Maiztasun enpirikoak: O_i	Probabilitatea: p_i	Maiztasun teorikoak: E_i	$\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$
A	20	0.25	$0.25 \times 60 = 15$	1.666
B	14	0.25	$0.25 \times 60 = 15$	0.066
C	12	0.25	$0.25 \times 60 = 15$	0.600
D	14	0.25	$0.25 \times 60 = 15$	0.066
Totalak	60	1	60	$X^2 = 2.398$

$X^2 = 2.398$ emaitzaren adierazgarritasuna edo esangura ebaluatzeko, erakusten duen diskrepantzia teorikoaren eta enpirikoaren artean proposaturiko eredua baztertzeko aski handia den ikusteko alegia, $\chi^2_{4-1} = \chi^2_3$ banaketa bateko 90. pertzentilarekin alderatu behar da, gainetik %10eko esangura-maila utziz, askatasun-maila kopurua 4-1 (4 jogurt klase - 1) izanik:

$$\chi^2_{4-1,0.1} = 6.251$$

$2.398 < 6.251$ betetzen denez, erabaki behat da ebidentziak ereduarekiko duen aldea ez dela aski handia eredua baztertzekko. Beraz, lau jogurrak neurri berean atseginak direla onartu eta jogurren bat besteak baino atseginagoa dela erabakitzeko aski arrazoirik ez dagoela erabaki behar da.

---

[96] 100 egunetan zehar egunero gertatzen den matxura kopuruak jaso dira (datu gordinak 0, 0, ..., 1, ... izango lirateke):

Matxura kopurua	0	1	2	3	>3
Egun kopurua	21	19	15	20	25

Khi-karratu probaren bitartez, Poisson eredua datu horietarako egokia dela esan al daiteke adierazgarritasun maila %10 izanik?

Lehenbizi Poisson eredua guztiz zehaztu beharko da, eta horretarako λ parametroa estimatu behar da. Lambda Poisson legearen itxaropen edo batezbestekoa denez, logikoena horren zenbatesle edo estimatzailetzat batezbesteko aritmetikoa hartzea da (3 baino handiagoak diren datuen balio adierazgarri gisa 5 balioa hartu da, jatorrizko daturik ezean):

$$\hat{\lambda} = \overline{x} = \frac{0 \times 21 + 1 \times 19 + 2 \times 15 + 3 \times 20 + 5 \times 25}{100} = 2.34 \textit{ matxura eguneko}$$

Parametroaren zenbatespen honekin, ereduaren probabilitate zehatzak eman daitezke. Poissonen banaketaren probabilitate funtzioa erabiliz:

$$P[X = x] = \frac{e^{-2.34} \times 2.34^x}{x!}$$

$x = 0, 1, 2, 3$ balioetarako probabilitateak kalkulaturik, goiko muturreko probabilitatea diferentziaz kalkulatzen da. Probabilitate horiek eta khi-karratu kalkulatzeko beste kalkuluak ondoko taula azaltzen dira:

Matxurak	Maiztasun enpirikoak: O_i	Probabilitatea: p_i	Maiztasun teorikoak: E_i	$\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$
0	21	0.096	$0.096 \times 100 = 9.6$	13.537
1	19	0.225	$0.225 \times 100 = 22.5$	0.544
2	15	0.264	$0.264 \times 100 = 26.4$	4.922
3	20	0.205	$0.205 \times 100 = 20.5$	0.012
>3	25	0.208	$0.208 \times 100 = 20.8$	0.848
Totalak	100	1	100	19.863

$$X^2 = \sum_i \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 13.537 + 0.544 + 4.922 + 0.012 + 0.848 = 19.863$$

Kasu honetan, ereduaren parametro bat datuetatik zenbatetsi edo estimatu denez, erreferentzia gisa hartu beharreko khi-karratu banaketak 5-1-1 (5 klase - 1 zenbatespen - 1) askatasun-maila ditu, zenbatespenaren balioaren erabilerak askatasun-maila bat gutxiago uzten baitu: $\chi^2_{5-1-1,0.1} = 6.251$.

19.863 > 6.251 betetzen denez, datuen diskrepantzia ereduarekiko esanguratsua da; hartara, hipotesi nuluak baieztatzen duen Poissonen eredua baztertu behar da eta beraz, datuetarako bestelako probabilitate-eredu bat zehaztu beharko litzateke.

---

[97] Ikasle talde bati matematika-test bat proposatu zaie. Izandako puntuazioak aldagai jarraitu bati dagozkionez, maiztasunak eskuratzeko tarteka bildu dira:

Puntuazioa	**0-20**	**20-40**	**40-60**	**60-80**	**80-100**
Ikasleak	**2**	**14**	**34**	**38**	**12**

%10eko adierazgarritasun mailaz datuetara banaketa normala doi egokitzen den erabaki behar da.

Banaketa normalaren probabilitateak kalkulatzeko, batezbestekoa eta desbideratze estandarra estimatu behar dira:

$$\hat{\mu} = \overline{x} = 58.8 \ ; \ \hat{s} = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \overline{x})^2}{n-1}} = 18.92$$

Datuek konfirmatu beharreko eredu normal estimatua hau da: $N(58.8, 18.92)$. Eredu horretatik probabilitateak estandarketaz eta taularen laguntzarekin estimatzen dira.

Puntuazioak	Maiztasun enpirikoak: O_i	Probabilitatea: p_i	Maiztasun teorikoak: E_i	$\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$
<0	0	0.001	$0.001 \times 100 = 0.1$	0.1
0-20	2	0.02	$0.02 \times 100 = 2$	0
20-40	14	0.14	$0.14 \times 100 = 14$	0
40-60	34	0.37	$0.37 \times 100 = 37$	0.243
60-80	38	0.34	$0.34 \times 100 = 34$	0.470
80-100	12	0.13	$0.13 \times 100 = 13$	0.077
>100	0	0.01	$0.01 \times 100 = 1$	1
Totalak	100	≈1	≈100	1.89

$$X^2 = \sum_i \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 0 + 0 + 0.243 + 0.470 + 0.077 = 1.89$$

Balio hau 7-2-1=2 askatasun maila dituen khi-karratu banaketaren 90. pertzentilarekin alderatu behar da, zenbatespenek bi askatasun-maila kentzen dituztelako: $\chi^2_{4,0.1} = 7.78$. X^2 estatistiko edo neurriaren balioa txikiagoa denez, maiztasun teoriko eta enpirikoen arteko diferentzia ez da adierazgarria, hipotesi nulua onartu eta beraz, eredu normala egokitzat hartzen da.

[100] Makina batean geldialdi bat izan arteko denborak jaso dira:

$26.2, 22.3, 33.5, 19.0, 24.7, 25.6, 26.2, 28.9, 27.6, 26.5, 27.1$

$32.4, 36.2, 34.1, 28.7, 26.5, 25.4, 23.4, 21.6, 22.0, 20.6, 30.2$

$19-21$, $21-23$, ... tarteak (gehi txikienetik beherako tartea eta handienetik gorako tartea) baliatuz, datuak banaketa normalera egokitzen diren erabaki ezazu khi-karratu kontrastea baliatuz, horretarako ereduaren batezbestekoaren eta desbideratzearen zenbatespenak eginez. Adierazgarritasun-maila: %10.

$$\hat{\mu} = \overline{x} = \frac{26.2 + \cdots + 30.2}{22} = 26.75$$

$$\hat{\sigma} = \hat{s} = \sqrt{\frac{(26.2-26.75)^2 + \cdots + (30.2-26.75)^2}{22-1}} = 4.46$$

Datuen batezbesteko aritmetiko sinplea 26.76 da eta banaketa esponentzialaren batezbestekoaren zenbatespen moduan erabiliko da:

$$\frac{1}{\hat{\lambda}} = 26.76 \rightarrow \hat{\lambda} = 0.037$$

Lambda parametroaren zenbatespen horrekin, probabilitateak kalkulatzen ahal dira:

$$P(X < 10) = 1 - e^{-0.037\times 10} = 0.31$$
$$P(10 < X < 20) = P(X < 20) - P(X < 10) = [1 - e^{-0.037\times 20}] - [1 - e^{-0.037\times 10}] = 0.52 - 0.31 = 0.21$$
$$P(20 < X < 30) = P(X < 30) - P(X < 20) = [1 - e^{-0.037\times 30}] - [1 - e^{-0.037\times 20}] = 0.67 - 0.52 = 0.15$$
$$P(30 < X < 40) = P(X < 40) - P(X < 30) = [1 - e^{-0.037\times 40}] - [1 - e^{-0.037\times 30}] = 0.77 - 0.67 = 0.10$$
$$P(X > 40) = 1 - [1 - e^{-0.037\times 40}] = 0.23$$

Khi-karratu estatistikoa maiztasun enpiriko eta teorikoetatik kalkulatzeko pausoak burutzen dira taula honetan:

Tarteak	Maiztasun enpirikoak: O_i	Probabilitatea: p_i	Maiztasun teorikoak: E_i	$\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$
0-10	0	0.31	6.82	6.82
10-20	1	0.21	4.62	2.83
20-30	16	0.15	3.3	48.87
30-40	5	0.10	2.2	3.56
> 40	0	0.23	5.06	5.06
Totalak	22	1	22	67.14

%10eko adierazgarritasun mailari dagokion balio kritikoa 5-1-1=3 askatasun-mailako khi-karratu batean 6.25 da. Beraz, estatistikoaren balioa balio kritikoa baino handiagoa denez, eredu esponentziala baztertu egin behar da datu horietarako.

Ohar garrantzitsua: Parametroaren balioa hasieratik eman izan balitz, zuzenean eta zenbatespenik gabe, erreferentziazko khi-karratu banaketaren askatasun-mailak 5-1 ziratekeen.

Homogeneotasun-probak: Wilcoxon hein-proba

[105] Denda batean hainbat gizon eta emakumek egindako erosketen zenbatekoak jaso dira:

$Gizonak: 3, 3, 5, 6, 8, 10, 10, 11, 11, 12, 12, 12, 16, 19, 20$

$Emakumeak: 2, 7, 9, 11, 13, 13, 15, 17, 17, 18, 20, 21, 23, 24, 25, 25, 27, 32, 36, 39$

Wilcoxonen hein proba baliatuz, batera jarri al daitezke gizon eta emakumeen datuak inferentziak egiterakoan? Adierazgarritasun-maila: %5. Oharra: banaketa normalaren hurbilketa erabil itzazu, eta p-balioaren nahiz eremu kritikoaren metodoen bitartez ebatzi.

Eremu kritikoaren metodoaz

Honako hauek dira lagin tamainak eta heinen baturak bi sexuetarako:

$$n_{gizon} = 15;\ W_{gizon} = 178.5$$

$$n_{emakume} = 20;\ W_{emakume} = 451.5$$

Balio kritikoa, alde biko tauletan, $n = 15$ eta $m = 20$ lagin tamainetarako eta %5eko esangura-mailaz 210 da. $W_{min} = 178.5$ estatistikoa horren azpitik dagoenez, esanguratsua da. Horrenbestez, hipotesi nulua baztertu behar da, gizon eta emakumeak desberdinak direla ondorioztatuz.

Hurbilketa normala erabiliz lagin-tamaima handietarako, W_{gizon} estatistikoa honela banatzen da:

$$W_{gizon} \sim N(\mu = 270, \sigma = 30)$$

Balio kritikoaren metodoa baliatuz, azpitik %2.5eko probabilitatea uzten duen balioa bilatu behar da estatistikoaren banaketa horretan (%2.5, W_{min} gizon nahiz emakumeekin gerta daitekeelarik, hemen haietako bakar batekin ari garelako, W_{gizon} estatistikoarekin hain zuzen):

$$P[W_{gizon} < W^*] = \{estandartuz\} = P\left[Z < \frac{W^* - 270}{30}\right] = 0.025 \longrightarrow \frac{W^* - 270}{30} = -1.96 \longrightarrow W^* = 211.2$$

$W_{gizon} = 178.5$ estatistikoa balio kritiko horren azpitik dago. Beraz, hipotesi nulua, berdintasuna baieztatzen duena, baztertu, eta gizon eta emakumeak desberdinak direla, eta hartara, inferentziak egiterakoan haien datuak bateratu ezin direla erabaki behar da.

Ohartu behar da, eskuin aldean ere balio kritiko bat izango dela, alde biko proba bati dagokion bezala, baino kasu honetan gizonei dagokien Wilcoxon estatistikoaren balioa 270eko batezbestekotik behera dagoela ikusita, garbi dago ezkerretik edo azpitik begiratu baino ez dugula egin behar.

p-balioaren metodoaz

Hipotesi nulupean, bi sexuetarako berdintasunean alegia, $W_{gizon} \sim N(\mu = 270, \sigma = 30)$, hau da, batez beste W_{gizon} estatistikoa 270 suertatu beharko litzateke. $W_{gizon} = 178.5$ suertatu da; beraz, espero behar dena *baino gutxiago*. Hori horrela, $W_{gizon} = 178.5$ *baino gutxiago* suertatzeko probabilitatea kalkulatu behar da, hipotesi nulupean betiere:

$$P[W_{gizon} < 178.5] = \{estandartuz\} = P\left[Z < \frac{178.5 - 270}{30}\right] = P[Z < -3.05] = 0.00114 < 0.025$$

p-balioa $\alpha/2$ baino txikiagoa da (gogoratu alde biko proba dela), eta hartara hipotesi nulua, sexu berdintasuna eta populazioen homogeneotasuna alegia, baztertu egin behar da.

[106] Matematikan arazoak zituzten haur zenbait programa berezi batean aritu dira azken urtean. Aurretik eta ondoren matematika proba bat egin zitzaien. Emaitzak honako hauek dira:

$Iaz : 22, 32, 43, 28, 27, 36$
$Aurten : 25, 42, 50, 35, 35, 42$

Programa arrakastatsua izan den erabaki Wilcoxon heinen proba baliatuz. Adierazgarritasun-maila: %5. Oharra: iazko eta aurtengo haurrak ezberdinak dira (beraz, lagin independenteak dira). Haur berdinei buruzko datuak balira, laginak binakatuak alegia, dependenteak lirateke eta beste proba bat garatu beharko litzateke (zeinuen proba, esaterako).

Hau ez da aurrekoak bezalako problema. Aurrekoetan, aukeran, H_0 baztertzen denean alegia, bi datu-multzoak desberdinak direla baieztatzen da, baina hemen aukeran norabide jakina ematen digute, alegia programa arrakastatsua izan den, hau da, aurtengo puntuazioak handiagoak diren. Beraz, froga ez da alde bikoa aurrekoetan bezala, baizik eta alde bakarrekoa. Beraz, alde bakarreko tauletan bilatu beharko da balio kritikoa.

Ohiko kalkuluak egin ditzagun:

22	25	27	28	32	35	35	36	42	42	43	50
i	a	i	i	i	a	a	i	a	a	i	a
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

$$W_{iaz} = 1 + 3 + 4 + 5 + 8 + 11 = 32$$

$$W_{aurten} = 2 + 6 + 7 + 9 + 10 + 12 = 46$$

Egia esan, bada posiblea aurtengo datuak hobeak izatea, programaren ondoren, aurtengo W handiagoa delako. Baino hori ez da nahikoa, aurtengo W estatistikoki esanguratsua edo aski hnadia den aztertu behar da.

W_{aurten} estatistikoari erreparatzen bazaio, W_{aurten} handia denean erabakiko dugu aurtengo datuak hobeak direla. Aukeran W_{iaz} ere har daiteke, eta orduan hori aski txikia denean (balio kritikoa baino txikiagoa) erabakiko da aurtengo datuak hobeak direla. Taulan beheko balio kritikoak besterik azaltzen ez direnez, W_{iaz} horri heldu beharko diogu erabakia hartzeko. Iazko eta aurtengo datu kopuruak, adierazgarritasun-maila eta froga alde bakarrekoa (one-tail) dela kontuan hartuz:

$$W^*_{min} = 28$$

W_{iaz} balio kritikoa baino handiagoa denez, aski txikia ez denez alegia, hipotesi nulua, berdintasuna alegia, onartzen jarraitu behar da, eta beraz ezingo da erabaki programa arrakastatsua denik.

[107] Larunbat eta igandeetan saldutako sarrerak jaso dira zinema batean asteburu batzuetan zehar:

Larunbatak: 126-91-68-122-113-137-111-86-100-82-96-121-97-95-89
Igandeak: 81-98-129-101-121-124-133-108-84-89-86-131

Igandeetan sarrera gehiago saltzen diren probatu behar da, Wilcoxon probaren bitartez, adierazgarritasun-maila %1 harturik. Oharra: taulak nahiz banaketa normalaren hurbilketa erabil itzazu.

Ez da homogeneotasunerako problema estandarra, non besterik gabe bi datu-multzoak berdinak (eta, aukeran, desberdinak) diren frogatu behar den horietako. Hemen, aukeran igandeetan gehiago saltzen den ezartzen da (eta ez soilik larunbatak eta igandeak desberdinak direla). Beraz, alde bakarreko proba da. Baina kalkuluak berdin garatzen dira hasiera batean:

68	81	82	84	86	86	89	89	91
L	I	L	I	L	I	I	L	L
1	2	3	4	5	6	7.5	7.5	9
95	96	97	98	100	101	108	111	113
L	L	L	I	L	I	I	L	L
10	11	12	13	14	15	16	17	18
121	121	122	124	126	129	131	133	137
L	I	L	I	L	I	I	I	L
19.5	19.5	21	22	23	24	25	26	27

$$n_{larunbata} = 15;\ W_{larunbata} = 198$$

$$n_{igandea} = 12;\ W_{igandea} = 180$$

Egia esan, aurrera jarraitu beharrik ez dago. Igandeetako estatistikoa larunbatekoa baino txikiagoa denez, ziurtasun handiz esan daiteke aurrez igandeetan gehiago saltzea ezinezkoa dela, igandeko datuak gutxiago izan arren. Halere, aurrera jarraituko dugu ebazpen osoa egitearren.

Tauletan begiratuz, $n = 12$ eta $m = 15$ balioetarako, balio kritikoa $W^* = 155$ da. Gogoratu behar da taulako n parametroak W txikiena eman beharko lukeen multzoko tamaina adierazten duela (nahiz eta hemen horrela ez den, igandeetan suertatzen baita W txikiena). $W_{larunbata} = 198$ gainetik dagoenez, berdintasuna erabaki behar da.

Hurbilketa normalaz, igandeetako W estatistikoaren ikuspuntutik egingo dugu. Banaketa normala hartuz hurbilketa moduan:

$$W_{igandea} \sim N\left(\mu = \frac{12 \times (12+15+1)}{2}, \sigma = \sqrt{\frac{12 \times 15 \times (12+15+1)}{12}}\right) : N(\mu = 168, \sigma = 20.49)$$

p-balioaren metodoaz, igandeetan gehiago saltzen den dugunez aukeran, gertatutakoaren gorako probabilitatea kalkulatu beharko da, igandeetako W estatistikoa handia denean esango baitugu igandeetan gehiago saltzen dela. Froga alde bakarrekoa denez kasu honetan, adierazgarritasun-mailarekin (eta ez horren erdiarekin, homogeneotasun problema estandarretan bezala) alderatu behar da:

$$P[W_{igandea} > 180] = P\left[Z > \frac{180 - 168}{20.49}\right] = P[Z > 0.58] = 0.28 > \alpha$$

Beraz, hipotesi nuluak ezartzen duen homogeneotasuna onartu eta beraz igandeetan sarrera gehiago saltzen direla baieztatzeko ebidentzia nahikorik ez dagoela erabaki behar da, aurreikusi dugun bezala.

Eremu kritikoaren metodoaz ebazteko, W^* balio kritikoa bilatzeari ekin behar diogu lehenik:

$$P[W_{igandea} > W^*] = P\left[Z > \frac{W^* - 168}{20.49}\right] = 0.01 \to \frac{W^* - 168}{20.49} = 2.32 \to W^* = 215,53$$

Eremu kritikoa hortik gora izango da igandeetan sarrera gehiago saltzen dela erabakitzeko $W_{igandea}$ estatistikoak handia behar duenez.

Suertatutako estatistikoaren balioa azpitik dagoenez, ez da aski adierazgarria eta bi egunetako berdintasuna onartzen da ondorioz.

Larunbatetako W estatistikoaren balio kritikotik ere ebaz daiteke, emaitza eta konklusio berdinekin. Horrela taulatik kalkulaturiko balioarekin alderatzeko aukera izango dugu gainera:

$$W_{larunbata} \sim N\left(\mu = \frac{15 \times (12+15+1)}{2}, \sigma = \sqrt{\frac{12 \times 15 \times (12+15+1)}{12}}\right) : N(\mu = 210, \sigma = 20.49)$$

Ikuspuntu honetatik, eremu kritikoa behetik dago (larunbatetako W *txikia* denean erabakiko da igandeak hobeak direla):

$$P[W_{larunbata} < W^*] = P\left[Z < \frac{W^* - 210}{20.49}\right] = 0.01 \rightarrow \frac{W^* - 210}{20.49} = -2.32 \rightarrow W^* = 162.4$$

$W_{larunbata} = 198$ balio kritikotik gora dago; beraz, hipotesi nulua onartu, eta bi egunak berdinak direla erabaki behar da.

Ikusten denez, hurbilketa normalaz lortzen den balio kritikoa, $W^* = 162.4$ alegia, nahiko gertu dago taulak ematen duen $W^* = 155$ balio zehatzetik.

Estimatzaileen lagin-banaketak

Demagun gela batean 4 neska eta 6 mutil daudela. 2 tamainako zorizko lagin sinplea aukeratzen da.

(a) Lagin posible guztiak eman, beren probabilitateekin batera.

(b) Mutilen proportzioaren lagin-banaketa eman ezazu eta horren batezbestekoa eta bariantza.

(a) Izenda dezagun N:neska eta M:mutil

Lagina	Probabilitatea
NN	$\frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{16}{100}$
NM	$\frac{4}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{24}{100}$
MN	$\frac{6}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{24}{100}$
MM	$\frac{6}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{36}{100}$
	1

(b) Lehenbizi, lagin posible bakoitzetik kalkulatzen den mutilen lagin proportzioa ($\hat{p}_M$) kalkulatzen dugu:

Lagina	$\hat{p}_M$	$P[\hat{p}_M]$
NN	0	$\frac{16}{100}$
NM	0.5	$\frac{24}{100}$
MN	0.5	$\frac{24}{100}$
MM	1	$\frac{36}{100}$
		1

Orain, emaitzak bildu egin ditugu, mutilen proportzioaren lagin banaketa eskuratzeko (lehenengo bi zutabeak) eta ondoren proportzioaren batezbestekoa eta bariantza emateko kalkuluak egiten ditugu:

$\hat{p}_M$	$P[\hat{p}_M]$	$\hat{p}_M P[\hat{p}_M]$	$\hat{p}_M^2 P[\hat{p}_M]$
0	0.16	0	0
0.5	0.48	0.24	0.12
1	0.36	0.36	0.36
	1	0.6	0.48

Beraz,

$$E[\hat{p}_M] = 0.6$$

$$var[\hat{p}_M] = 0.48 - 0.6^2 = 0.12$$

Ohartu behar da lagin proportzioaren batezbestekoa bat datorrela populazioko proportzioarekin:

$$E[\hat{p}_M] = \hat{p}_M = \frac{6}{10} = 0.6$$

Bariantzaren emaitza ere lagin proportzio batetik espero daitekeen emaitza da:

$$var[\hat{p}_M] = \frac{p_M q_M}{2} = \frac{0.6 \times 0.4}{2}$$

GIZAPEDIA

gizapedia.hirusta.io

ESTATISTIKA ENPRESARA APLIKATUA

PROBLEMA OSAGARRIAK EBATZITA

Egilea: Josemari Sarasola

Makina automatiko batean eguneko ekoizpena programa daiteke: 1. 2. 3, 4 edo 5 pieza ekoiz daitezke. Matxurak direla eta, azkenean programan ezarrita baino pieza gutxiago ekoiztea gerta daiteke. Programan ezarritako kopurua k izanik, azkenik ekoizten den pieza kopurua probabilitate funtzio honi jarraiki banatzen dela uste da:

$$P[X = x] = \frac{2x}{(k+1)k} \ ; \ x = 1, 2, \ldots, k$$

Piezak egiteko metal bat erabiltzen da. Metal mota bi erabil daitezke:

- **10 unitateko erresistentzia duena,**
- **20 unitateko erresistentzia duena.**

e erresistentziaren arabera eta k programan ezarritako kopuruaren arabera, pieza baten y desbideratzea ezaugarri baten neurri estandarrerako zorizkoa da eta honela banatzen dela uste da:

$$f(y) = \frac{e-k}{ke} \ ; \ 0 < y < \frac{ke}{e-t}$$

Egun batean gehienez 1 unitateko desbideratzea duten 2 pieza ekoitzi behar dira. Horretarako, programa eta metal mota egokienak zehaztu behar dira.

---

k pieza programatuta, gehienez k pieza ekoizten dira, logikoa denez eta ekoitzitako x pieza kopuruaren banaketak (balio posibleak k-rainokoak direnez) erakusten duen bezala. Beraz, 2 pieza ekoitzi ahal izateko, gutxienez 2 pieza programatu beharko dira.

Zehaztu dezagun x ekoizpenaren banaketa $k \geq 2$ balioetarako:

$k=2$		$k=3$		$k=4$		$k=5$	
x	$P[X=x]=2x/6$	x	$P[X=x]=2x/12$	x	$P[X=x]=2x/20$	x	$P[X=x]=2x/30$
$x=1$	$2/6=0.333$	$x=1$	$2/12=0.166$	$x=1$	$2/20=0.100$	$x=1$	$2/30=0.066$
$x=2$	$4/6=0.666$	$x=2$	$4/12=0.333$	$x=2$	$4/20=0.200$	$x=2$	$4/30=0.133$
		$x=3$	$6/12=0.500$	$x=3$	$6/20=0.300$	$x=3$	$6/30=0.200$
				$x=4$	$8/20=0.400$	$x=4$	$8/30=0.266$
						$x=5$	$10/30=0.333$

Orain, eman dezagun desbideratzearen banaketa e eta k ezberdinetarako:

f(y)=$\frac{e-k}{ke}$; $0<y<\frac{ke}{e-t}$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$e=10$	f(y)=$\frac{8}{20}$; $0<y<2.5$	f(y)=$\frac{7}{30}$; $0<y<4.28$	f(y)=$\frac{6}{40}$; $0<y<6.66$	f(y)=$\frac{5}{50}$; $0<y<10$
$e=20$	f(y)=$\frac{18}{40}$; $0<y<2.22$	f(y)=$\frac{17}{60}$; $0<y<3.52$	f(y)=$\frac{16}{80}=\frac{1}{5}$; $0<y<5$	f(y)=$\frac{15}{100}$; $0<y<6.66$

Orain, horietan pieza baten desbideratzea 1 baino txikiagoa izateko probabilitatea kalkulatu behar dugu:

f(y)=$\frac{e-k}{ke}$; $0<y<\frac{ke}{e-t}$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$e=10$	0.4	0.23	0.15	0.10
$e=20$	0.45	0.28	0.20	0.15

Probabilite horien kalkuluaren adibide gisa, ikus dezagun $e = 10, k = 2$ konbinaziorako:

$$P[X < 1] = \int_0^1 \frac{8}{20} dx = \left[\frac{8x}{20}\right]_0^1 = \frac{8}{20} = 0.4$$

Orain kalkula dezagun e, k konbinazio bakoitzean zenbatekoa den gutxienez 1 baino desbideratze txikiagoa duten bi pieza kalkulatzeko probabilitatea, $P[X_{(<1)} \geq 2]$ deituko duguna. Ohartu behar da *edo* batuketaz itzultzen dela probabilitateak kalkulatzerakoan, eta *eta* biderketaz.

- $\boxed{e = 10, k = 2}$

$$P[P[X_{(<1)} \geq 2] = P[X = 2 \; eta \; X_{(<1)} = 2] = 0.666 \times 0.4 \times 0.4 = 0.111$$

- $\boxed{e = 20, k = 2}$

$$P[P[X_{(<1)} \geq 2] = P[X = 2 \; eta \; X_{(<1)} = 2] = 0.666 \times 0.45 \times 0.45 = 0.135$$

- $\boxed{e = 10, k = 3}$

$$\begin{aligned} P[P[X_{(<1)} \geq 2] &= P[(X = 2 \; eta \; X_{<1} = 2) \; edo \; (X = 3 \; eta \; X_{<1} = 2 \;\; edo \;\; 3)] \\ &= (0.333 \times 0.23^2) + 0.500 \times \left(0.77 \times 0.23^2 \times \frac{3!}{2!1!} + 0.23^3\right) \\ &= 0.084 \end{aligned}$$

- $\boxed{e = 20, k = 3}$

$$\begin{aligned} P[P[X_{(<1)} \geq 2] &= P[(X = 2 \; eta \; X_{<1} = 2) \; edo \; (X = 3 \; eta \; X_{<1} = 2 \;\; edo \;\; 3)] \\ &= (0.333 \times 0.28^2) + 0.500 \times \left(0.77 \times 0.28^2 \times \frac{3!}{2!1!} + 0.28^3\right) \\ &= 0.127 \end{aligned}$$

- $\boxed{e = 10, k = 4}$

$$\begin{aligned} [P[X_{(<1)} \geq 2] = P[&(X = 2 \; eta \; X_{<1} = 2) \; edo \; (X = 3 \; eta \; X_{<1} = 2 \;\; edo \;\; 3) \\ & edo \; (X = 4 \; eta \; X_{<1} = 2 \;\; edo \;\; 3 \;\; eta \;\; 4)] \\ &= (0.2 \times 0.15^2) + 0.3 \times \left(0.85 \times 0.15^2 \times \frac{3!}{2!1!} + 0.15^3\right) \\ &+ 0.4 \times \left(0.85^2 \times 0.15^2 \times \frac{4!}{2!2!} + 0.85 \times 0.15^3 \times \frac{4!}{3!1!} + 0.15^4\right) \\ &= 0.066 \end{aligned}$$

- $\boxed{e = 20, k = 4}$

$$\begin{aligned} [P[X_{(<1)} \geq 2] = P[&(X = 2 \; eta \; X_{<1} = 2) \; edo \; (X = 3 \; eta \; X_{<1} = 2 \;\; edo \;\; 3) \\ & edo \; (X = 4 \; eta \; X_{<1} = 2 \;\; edo \;\; 3 \;\; eta \;\; 4)] \\ &= (0.2 \times 0.20^2) + 0.3 \times \left(0.80 \times 0.20^2 \times \frac{3!}{2!1!} + 0.20^3\right) \\ &+ 0.4 \times \left(0.80^2 \times 0.20^2 \times \frac{4!}{2!2!} + 0.80 \times 0.20^3 \times \frac{4!}{3!1!} + 0.20^4\right) \\ &= 0.111 \end{aligned}$$

- $\boxed{e = 10, k = 5}$

$$
\begin{aligned}
[P[X_{(<1)} \geq 2] = P[&(X = 2 \; eta \; X_{<1} = 2) \; edo \; (X = 3 \; eta \; X_{<1} = 2 \; or \; 3) \\
& edo \; (X = 4 \; eta \; X_{<1} = 2 \;\; edo \;\; 3 \;\; edo \;\; 4) \\
& edo \; (X = 5 \; eta \; X_{<1} = 2 \;\; edo \;\; 3 \;\; edo \;\; 4 \;\; edo \;\; 5)] \\
&= (0.133 \times 0.10^2) + 0.200 \times \left(0.90 \times 0.10^2 \times \frac{3!}{2!1!} + 0.10^3\right) \\
&+ 0.266 \times \left(0.90^2 \times 0.10^2 \times \frac{4!}{2!2!} + 0.90 \times 0.10^3 \times \frac{4!}{3!1!} + 0.10^4\right) \\
&+ 0.333 \times \left(0.90^3 \times 0.10^2 \times \frac{5!}{3!2!} + 0.90^2 \times 0.10^3 \times \frac{5!}{2!3!} + 0.90 \times 0.10^4 \times \frac{5!}{1!4!} + 0.10^5\right) \\
&= 0.055
\end{aligned}
$$

- $\boxed{e = 20, k = 5}$

$$
\begin{aligned}
[P[X_{(<1)} \geq 2] = P[&(X = 2 \; eta \; X_{<1} = 2) \; edo \; (X = 3 \; eta \; X_{<1} = 2 \; or \; 3) \\
& edo \; (X = 4 \; eta \; X_{<1} = 2 \;\; edo \;\; 3 \;\; edo \;\; 4) \\
& edo \; (X = 5 \; eta \; X_{<1} = 2 \;\; edo \;\; 3 \;\; edo \;\; 4 \;\; edo \;\; 5)] \\
&= (0.133 \times 0.15^2) + 0.200 \times \left(0.85 \times 0.15^2 \times \frac{3!}{2!1!} + 0.15^3\right) \\
&+ 0.266 \times \left(0.85^2 \times 0.15^2 \times \frac{4!}{2!2!} + 0.85 \times 0.15^3 \times \frac{4!}{3!1!} + 0.15^4\right) \\
&+ 0.333 \times \left(0.85^3 \times 0.15^2 \times \frac{5!}{3!2!} + 0.85^2 \times 0.15^3 \times \frac{5!}{2!3!} + 0.85 \times 0.15^4 \times \frac{5!}{1!4!} + 0.15^5\right) \\
&= 0.099
\end{aligned}
$$

Emaitzak taula batean bilduz:

$P[X_{(<1)} \geq 2$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
$e = 10$	0.111	0.085	0.066	0.055
$e = 20$	0.135	0.127	0.111	0.099

Beraz, 2 pieza zuzen edo gehiago ekoiztera probabilitate handienez daraman aukera $k = 2$ piezako programa eta 20 unitateko erresistentziako metala da.

Makina batek marmeladaz betetzen ditu pote hutsak. Poteen edukiera nominal edo estandarra kilo batekoa da, baina makinaren zehaztasun eza dela eta, desbideratzeak izaten dira. Potea gaizki beteta dagoela kontsideratzen da kilotik 100 gr baino gehiago desbideratzen denean. Esperientziaren arabera badakigu potea gaizki betea bada, hurrengo potea gaizki betetzeko probabilitatea handiagoa dela; aitzitik, ongi betea bada, hurrengo potea ongi betetzeko probabilitatea handiagoa izango da. Horretan oinarrituta, eredu hau ezarri da:

- **aurretik k pote segidan gaizki bete badira, hurrengo potean sartzen den edukia honela banatzen da (oharra: $k > 4$ denean, $k = 4$ hartzen da):**

$$f(x) = \frac{1}{400k} \; ; \; 1000 - 200k < x < 1000 + 200k \; ; \; k = 1, 2, 3, 4$$

- **aurretik k pote segidan ongi bete badira, hurrengo potean sartzen den edukia honela banatzen da (oharra: $m > 4$ denean, $m = 4$ hartzen da):**

$$f(x) = \frac{1}{2000 - 200m} \; ; \; 200m < x < 2000 - 200m \; ; \; m = 1, 2, 3, 4$$

(a) Egiaztatu emandako dentsitate-funtzioak bat datozela enpresaren esperientziarekin.

(b) Aurretik gaizki betetako pote 2 izan badira, hurrengo 3 poteetan gutxienez ongi betetako pote bat izateko probabilitatea eman ezazu.

$\boxed{\text{(a)}}$ Kalkula dezagun k parametro guztietarako, hots aurrez gaizki betetako pote kopuru guztietarako, zenbatekoa den gaizki betetzeko probabilitatea, kontuan hartuz potea gaizki beteta dagoela kilotik dagoen desbideratzea 100 baino handiagoa denean. Adibidez, $k = 1$ denean, honela banatzen da edukia:

$$f(x) = \frac{1}{400} \; ; \; 800 < x < 1200\$$$

Eta honela kalkulatzen da potea *ongi* betetzeko probabilitatea:

$$\int_{900}^{1100} \frac{1}{400} dx = \left[\frac{x}{400} \right]_{900}^{1100} = \left[\frac{1100}{400} \right] - \left[\frac{900}{400} \right] = 0.5$$

Era berean eginez beste k balioetarako, emaitza hauek eskuratzen ditugu:

k	Dentsitate-funtzioa	$P[ongi] = P[900 < X < 1000]$	$P[gaizki] = 1 - P[ongi]$
1	$f(x) = \frac{1}{400}$; $800 < x < 1200$	0.5	0.5
2	$f(x) = \frac{1}{800}$; $600 < x < 1400$	0.25	0.75
3	$f(x) = \frac{1}{1200}$; $400 < x < 1600$	0.16	0.84
4	$f(x) = \frac{1}{1600}$; $200 < x < 1800$	0.125	0.875

Orain kalkula dezagun m parametro guztietarako, hots aurretik ongi betetako pote kopuru guztietarako, zenbatekoa den ongi betetzeko probabilitatea. Adibidez, $m = 1$ denean, honela banatzen da edukia:

$$f(x) = \frac{1}{1600} \; ; \; 200 < x < 1800$$

Eta honela kalkulatzen da potea *ongi* betetzeko probabilitatea:

$$\int_{900}^{1100} \frac{1}{1600} dx = \left[\frac{x}{1600}\right]_{900}^{1100} = \left[\frac{1100}{1600}\right] - \left[\frac{900}{1600}\right] = 0.125$$

Era berean eginez beste m balioetarako, emaitza hauek eskuratzen ditugu:

m	Dentsitate-funtzioa	$P[ongi] = P[900 < X < 1000]$	$P[gaizki] = 1 - P[ongi]$
1	$f(x) = \frac{1}{1600}\,;\; 200 < x < 1800$	0.125	0.875
2	$f(x) = \frac{1}{1200}\,;\; 400 < x < 1600$	0.16	0.84
3	$f(x) = \frac{1}{800}\,;\; 600 < x < 1400$	0.25	0.75
4	$f(x) = \frac{1}{400}\,;\; 800 < x < 1200$	0.5	0.5

Ikusten denez, aurretik gaizki betetako pote bakoitzeko, gaizki betetzeko probabilitatea gero eta handiagoa da; eta aurretik ongi betetako pote bakoitzeko, ongi betetzeko probabilitatea gero eta txikiagoa da.

Hala ere, badago zerbait enpresaren usteekin bat ez datorren puntu bat: ongi betetzeko probabilitatea aurretik pote bat ongi beteta izanik, 0.125 alegia, txikiagoa da aurretik potea gaizki beteta dagoenean, hots 0.5, baino.

[b] Aurretik bi pote gaizki bete badira, $k = 2$ dugu hasieran.

Hortik aurrera honako hauek dira hurrengo 3 poteetan gutxienez ongi betetako pote bat izateko moduak eta horien probabilitateak:

- $P[1\ pote\ ongi] = P[OXX\ edo\ XOX\ edo\ XXO] = 0.109375 + 0.105 + 0.315 = 0.529375$
  - $P[OXX] = 0.25 \times 0.875 \times 0.5 = 0.109375$, $(k = 2 \to O, m = 1 \to X, k = 1 \to X)$ harturik;
  - $P[XOX] = 0.75 \times 0.16 \times 0.875 = 0.105$, $(k = 2 \to X, k = 3 \to O, m = 1 \to X)$ harturik;
  - $P[XXO] = 0.75 \times 0.84 \times 0.5 = 0.315$, $(k = 2 \to X, k = 3 \to X, k = 4 \to O)$ harturik;
- $P[2\ pote\ ongi] = P[OOX\ edo\ OXO\ edo\ XOO] = 0.02625 + 0.109375 + 0.015 = 0.150625$
  - $P[OOX] = 0.25 \times 0.125 \times 0.84 = 0.02625$, $(k = 2 \to O, m = 1 \to O, m = 2 \to X)$ harturik;
  - $P[OXO] = 0.25 \times 0.875 \times 0.5 = 0.109375$, $(k = 2 \to O, m = 1 \to X, k = 1 \to O)$ harturik;
  - $P[XOO] = 0.75 \times 0.16 \times 0.125 = 0.015$, $(k = 2 \to X, k = 3 \to O, m = 1 \to O)$ harturik;
- $P[3\ pote\ ongi] = P[OOO] = 0.25 \times 0.125 \times 0.16 = 0.02625 = 0.005$, $(k = 2 \to O, m = 1 \to O, m = 2 \to O)$ harturik;

Beraz,

$$\begin{aligned} P[gutxienez\ pote\ bat\ ongi] &= P[1\ pote\ ongi] + P[2\ bote\ ongi] + P[3\ pote\ ongi] \\ &= 0.529375 + 0.150625 + 0.005 = 0.685 \end{aligned}$$

Artisau batek egiten dituen luxuzko bitxiak erosteko eskaerak, bakoitza prezio eskaintza zehatz batekin, jasotzen ditu, enkantean alegia. Egunaren hasieran, emaila begiratu eta han jasotako eskaintzak aztertzen ditu. 5 eskaintza hoberenak gordetzen ditu gehienez (edo gutxiago, eskaintza gutxiago jasotzen badira), bezperan bete ahal izan ez dituen bezperako eskaintzak barne, bere web orrian adierazten den bezala.

Egunean jasotzen duen eskaintza kopuru honela banatzen dela uste du:

$$P[X=x] = \frac{1}{2^{m+1}} \; ; \; x = 0, 1, 2, \ldots$$

Bere eguneko ekoizpenari buruz, berriz, 0, 1, 2 edo 3 bitxi egin ditzake, lege honen arabera: egunean k bitxi bukatzeko probabilitatea $k-1$ bitxi egiteko probabilitatearen erdia dela uste du.

Egunaren amaieran geratuko zaizkion bete gabeko eskaintzen itxaropena kalkulatu behar da.

Lehenik eta behin, eguneko ekoizpenaren banaketa zehaztu behar da:

y	0	1	2	3	
$p(y)$	p	$\frac{p}{2}$	$\frac{p}{4}$	$\frac{p}{8}$	1

Probabilitateen batura 1 izan behar jakinik, $p = \dfrac{8}{15}$ bete behar da, eta hortik banaketa honela geratzen da zehaztuta:

y	0	1	2	3	
$p(y)$	$\frac{8}{15} = 0.53$	$\frac{8}{30} = 0.27$	$\frac{8}{60} = 0.13$	$\frac{8}{120} = 0.07$	1

Kalkuluetarako, ondo etorriko zaigu eguneko eskaera kopuruaren balio txikietarako probabilitateak kalkulatzea:

$$P[X=x] = \frac{1}{2^{x+1}} \; ; \; x = 0, 1, 2, \ldots$$

x	0	1	2	3	4	≥ 5
$p(x)$	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.03125	0.03125

Orain, garbi dago bete gabeko eskaeren banaketa ezberdina dela bezperatik bete gabeko eskaerak zenbat diren, eta beraz, bete gabeko eskaera kopuru horietarako banaketa bereizi bana egin beharko da. x egunean jasotako eskaerak badira, y eguneko ekoizpena, eta z egunaren amaieran bete gabe geratzen diren eskaerak:

$\boxed{\text{Bezperatik 0 eskaera badago:}}$

x	$p(x)$	y	$p(y)$	z	$p(z) = p(x) \times p(y)$
0	0.5	≥ 0	1	0	0.5
1	0.25	0	0.53	1	0.1325
1	0.25	≥ 1	0.47	0	0.1175
2	0.125	0	0.53	2	0.06625
2	0.125	1	0.27	1	0.03375
2	0.125	≥ 2	0.20	0	0.025
3	0.0625	0	0.53	3	0.033125
3	0.0625	1	0.27	2	0.016875
3	0.0625	2	0.13	1	0.008125
3	0.0625	3	0.07	0	0.004375
4	0.03125	0	0.53	4	0.0165625
4	0.03125	1	0.27	3	0.0084375
4	0.03125	2	0.13	2	0.0040625
4	0.03125	3	0.07	1	0.0021875
≥ 5	0.03125	0	0.53	5	0.0165625
≥ 5	0.03125	1	0.27	4	0.0084375
≥ 5	0.03125	2	0.13	3	0.0040625
≥ 5	0.03125	3	0.07	2	0.0021875

Adibidez, azken errenkadari buruz, 8 eskaera jasotzen badira, 5 hoberenei egingo zaie erreserba, eta ekoizpena 3 bada, 2 erreserba edo eskaera geratuko dira bete gabe egunaren amaieran.

z eta $p(z)$ emaitzak bilduz, eta μ itxaropena kalkulatuz:

z	0	1	2	3	4	5	
$p(z)$	0.646875	0.1765625	0.089375	0.045625	0.025	0.0165625	1
$zp(z)$	0	0.1765625	0.17875	0.136875	0.1	0.0828125	$\boxed{\mu = 0.675}$

Bezperatik 1 eskaera badago:

x	$p(x)$	y	$p(y)$	z	$p(z) = p(x) \times p(y)$
0	0.5	0	0.53	1	0.265
0	0.5	≥ 1	0.47	0	0.235
1	0.25	0	0.53	2	0.1325
1	0.25	1	0.27	1	0.0675
1	0.25	≥ 2	0.20	0	0.05
2	0.125	0	0.53	3	0.06625
2	0.125	1	0.27	2	0.03375
2	0.125	2	0.13	1	0.01625
2	0.125	3	0.07	0	0.00875
3	0.0625	0	0.53	4	0.033125
3	0.0625	1	0.27	3	0.016875
3	0.0625	2	0.13	2	0.008125
3	0.0625	3	0.07	1	0.004375
≥ 4	0.0625	0	0.53	5	0.033125
≥ 4	0.0625	1	0.27	4	0.016875
≥ 4	0.0625	2	0.13	3	0.008125
≥ 4	0.0625	3	0.07	2	0.004375

z eta $p(z)$ emaitzak bilduz, eta μ itxaropena kalkulatuz:

z	0	1	2	3	4	5	
$p(z)$	0.29375	0.353125	0.17875	0.09125	0.05	0.0033125	1
$zp(z)$	0	0.353125	0.3575	0.27375	0.2	0.165625	$\boxed{\mu = 1.35}$

Bezperatik 2 eskaera badago:

x	$p(x)$	y	$p(y)$	z	$p(z) = p(x) \times p(y)$
0	0.5	0	0.53	2	0.265
0	0.5	1	0.27	1	0.135
0	0.5	≥ 2	0.20	0	0.1
1	0.25	0	0.53	3	0.1325
1	0.25	1	0.27	2	0.0675
1	0.25	2	0.13	1	0.0325
1	0.25	3	0.07	0	0.0175
2	0.125	0	0.53	4	0.06625
2	0.125	1	0.27	3	0.03375
2	0.125	2	0.13	2	0.01625
2	0.125	3	0.07	1	0.00875
≥ 3	0.125	0	0.53	5	0.06625
≥ 3	0.125	1	0.27	4	0.03375
≥ 3	0.125	2	0.13	3	0.01625
≥ 3	0.125	3	0.07	2	0.00875

z eta $p(z)$ emaitzak bilduz, eta μ itxaropena kalkulatuz:

z	0	1	2	3	4	5	
$p(z)$	0.1175	0.17625	0.3575	0.1825	0.1	0.006625	1
$zp(z)$	0	0.17625	0.715	0.5475	0.4	0.33125	$\boxed{\mu = 2.17}$

Bezperatik 3 eskaera badago:

x	$p(x)$	y	$p(y)$	z	$p(z) = p(x) \times p(y)$
0	0.5	0	0.53	3	0.265
0	0.5	1	0.27	2	0.135
0	0.5	2	0.13	1	0.065
0	0.5	3	0.07	0	0.035
1	0.25	0	0.53	4	0.1325
1	0.25	1	0.27	3	0.0675
1	0.25	2	0.13	2	0.0325
1	0.25	3	0.07	1	0.0175
≥ 2	0.25	0	0.53	5	0.1325
≥ 2	0.25	1	0.27	4	0.0675
≥ 2	0.25	2	0.13	3	0.0325
≥ 2	0.25	3	0.07	2	0.0175

z eta $p(z)$ emaitzak bilduz, eta μ itxaropena kalkulatuz:

z	0	1	2	3	4	5	
$p(z)$	0.035	0.0825	0.185	0.365	0.2	0.1325	1
$zp(z)$	0	0.0825	0.37	1.095	0.8	0.6625	$\boxed{\mu = 3.01}$

Bezperatik 4 eskaera badago:

x	$p(x)$	y	$p(y)$	z	$p(z) = p(x) \times p(y)$
0	0.5	0	0.53	4	0.265
0	0.5	1	0.27	3	0.135
0	0.5	2	0.13	2	0.065
0	0.5	3	0.07	1	0.035
≥ 1	0.5	0	0.53	5	0.265
≥ 1	0.5	1	0.27	4	0.135
≥ 1	0.5	2	0.13	3	0.065
≥ 1	0.5	3	0.07	2	0.035

z eta $p(z)$ emaitzak bilduz, eta μ itxaropena kalkulatuz:

z	1	2	3	4	5	
$p(z)$	0.035	0.10	0.20	0.40	0.265	1
$zp(z)$	0.035	0.20	0.60	1.6	1.325	$\boxed{\mu = 3.76}$

Bezperatik 5 eskaera badago:

Kasu honetan, ez da eskaera berririk jasotzen eta egun bukaerako bete gabeko z eskaerak 5-0, 5-1, 5-2 eta 5-3 izan daitezke, 0, 1, 2 eta 3 ekoizpen probabilitateen arabera:

z	2	3	4	5	
$p(z)$	0.07	0.13	0.27	0.53	1
$zp(z)$	0.14	0.39	1.08	2.65	$\boxed{\mu = 4.26}$

Enpresa batek erosten dituen 100 osagaietako loteak kalitate kontrola egiteko aukera zenbait planteatu ditu:

1. **osagai guztiak aldez aurretik aztertu akastun guztiak aurkitzeko;**
2. **osagai loteak 10 tamainako lagin baten bitartez onartu edo baztertzea: laginean akastunik ez badago, lotea onartu egiten da; bestela baztertu egiten da;**
   (a) **baztertutako loteak itzuli egiten daitezke;**
   (b) **edota oso osorik aztertu akastunak aurkitzeko.**
3. **osagairik aztertu gabe ekoiztea.**

Hornitzaileak bi motako loteak bidaltzen ditu:

- **lote onak, non akastunak izateko probabilittaea 0.02 den;**
- **lote txarrak, non akastunak izateko probabilitatea 0.1 den.**

Azken aldi honetan, 5 loteetatik 1 txarra dela pentsatzen da.

Gainera, kostuei buruzko informazio hau dauka:

- **Osagai akastun batek dakarren kostua 0.25€-koa da.**
- **Osagai bakoitza aztertzeko kostua 0.01€-koa da.**
- **Lote osoa edo banakako osagai akastunak itzultzeak ez dakar inongo kosturik.**
- **Laginketa-kostua 0.02€-koa da osagai bakoitzeko.**

---

1. aukera: osagai guztiak aztertu

Loteko kostua 1€izango da, 0.01€bider 100 osagai. Kasu honetan, kostua finkoa da eta ez da probabilitateen araberakoa.

2. aukera: baztertutako loteak itzultzea

Aukera hau aztertzeko, lotea onartu eta baztertzeko probabilitateak kalkulatu behar dira, lote on nahiz txarretarako:

- **lotea ona bada,**

$$P[onartu] = P[10\ piezak\ onak] = 0.98^{10} = 0.8170 \rightarrow P[lotea\ baztertu] = 1 - 0.8170 = 0.1230$$

- **lotea txarra bada,**

$$P[onartu] = P[10\ piezak\ onak] = 0.9^{10} = 0.3487 \rightarrow P[lotea\ baztertu] = 1 - 0.3487 = 0.6513$$

Lotea ona bada, aztertu gabe 90 osagai geratzen dira, eta haien artean, batez beste $90 \times 0.02 = 1.8$ osagai akastun izango dira. Horiek $1.8 \times 0.25 = 0.45$€-ko kostua ekarriko dute onartzen badira.

Lotea txarra bada, aztertu gabe 90 osagai geratzen dira, eta haien artean, batez beste $90 \times 0.1 = 9$ osagai akastun izango dira. Horiek $9 \times 0.25 = 2.25$€-ko kostua ekarriko dute onartzen badira.

Lote onak zein txarrak baztertzen badira, ez da inongo itzulketa-kosturik sortzen. Beraz

Lote onak 5etatik 4 direnez, batez besteko kostua lote bakoitzeko hau izango da: $E[kostua] = \frac{4}{5} \times 0.8170 \times 0.45 + \frac{1}{5} \times 0.3487 \times 2.25 = 0.45$€da.

Horri gehitu behar zaio laginketa kostua, 2€, eta lagineko osagaiak akastunak diren jakiteko kostua, $0.01 \times 10 = 0.1$€; guztira 2.1€.

Beraz, aukera honi dagokion batez besteko kostua guztira 2.1+0.45=2.55€da, baina horretatik kostu finkoak 2.1.

3. aukera: baztertutako loteak oso osorik aztertzea

Baztertutako loteetan 90 osagai aztertu behar dira akastunak baztertzeko. Horren kostua $90 \times 0.01 = 0.9$€da. Lote bat baztertzeko probabilitatea hau da:

$$P[lotea\ baztertu] = P[(ona\ ETA\ baztertu)\ EDO\ (txarra\ ETA\ baztertu)] = 0.8 \times 0.1230 + 0.2 \times 0.6513 = 0.22866$$

Beraz, lote bat baztertu eta bertako osagai guztiak aztertzeko kostua batez beste $0.22866 \times 0.9 = 0.205794$€da.

Beste kostu guztiak aurreko aukerako berdinak dira, eta beraz batez besteko kostu totala 2.55+0.20=2.75€da.

Aurretik ziurta daiteke aukera honen kostua handiagoa dela, aurreko aukeran itzulketa kostua 0 den bitartean, hemen baztertutako loteak osorik aztertzeko kostu gehigarri bat sortzen baita.

4. aukera: osagairik aztertu gabe ekoiztea

Aukera honetan, lote onek batez beste $100 \times 0.02 = 2$ osagai akastun izango dituzte, eta horiek $0.25 \times 2 = 0.5$€-ko kostua ekarriko dute. Lote txarrek, berriz, $100 \times 0.1 = 10$ osagai akastun izango dituzte, eta horiek $0.25 \times 10 = 2.5$€-ko kostua ekarriko dute. Lote onak 4etatik 5 direnez, honako hau izango da kostuaren itxaropena:

$$E[kostua] = \frac{4}{5} \times 0.5 + \frac{1}{5} \times 2.5 = 0.9$$

Beraz, aukera guztietan batez besteko kostu txikiena ematen duena azkena da: osagairik eta loterik aztertu gabe, osagai guztiak ekoizpen-prozesura sartzea.

PROBLEMA: Finantza aktibo baten errentagarritasuna honela banatzen dela uste da (x portzentajea inbertitutako kapitalari buruz:

$$f(x) = 0.08(x+2) \ ; \ -2 < x < 3$$

Inbertitzaile bati honako aukera hauek eskaintzen zaizkio aktibo horretan inbertitzeko:

1. Aktiboaren errentagarritasun gordina jasotzea, aurreko banaketaren arabera gertatzen dena.
2. Errentagarritasun gordina negatiboa bada, %0-ko errentagarritasuna, eta positiboa bada, %1.
3. Errentagarritasun gordina negatiboa bada, -%1-eko errentagarritasuna, 0-1 bitartekoa bada, %1, eta 1-3 bitartekoa bada, %2.

Egin beharreko atazak:

(i) Bigarren aukerari buruz, %0 eta %1-eko errentagarritasunak jasotzeko probabilitateak kalkulatu.

(ii) Hirugarren aukerari buruz, -%1, %1 eta %2-ko errentagarritasunak jasotzeko probabilitateak kalkulatu.

(iii) Hiru aukeretan, zein da optimoa epe luzera?

(iv) Kalkulatu galerak izateko probabilitatea, hiru aukeretarako.

(v) Hiru aukerak ordenatu μ eta σ-ren arabera. Binakako preferentzien taula ere eratu. Zein baztertuko zenuke? Dilema sortzen al da baztertzen ez direnen artean? Zein da aukera optimoa? Dilema izatekotan, $U = \frac{\mu}{\sigma}$ utilitate funtzioa erabili.

(vi) Hiru aukerak ordenatu μ, σ eta galerak izateko probabilitatearen arabera. Binakako preferentzien taula ere eratu. Zein baztertuko zenuke? Dilema sortzen al da baztertzen ez direnen artean? Zein da aukera optimoa? Dilema izatekotan, $U = \dfrac{\mu}{\sigma} - p(galera)$ utilitate funtzioa erabili.

PROBLEMA

Saltzaile batek 10 inprimagailu ditu biltegian.

Horien eskaria, p=100€ -ko prezioan eta lehenengo hilabetean, honela banatzen dela uste da:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(x)$	0.05	0.05	0.10	0.10	0.10	0.20	0.10	0.10	0.10	0.05	0.05

Bigarren hilabetean lehenengo hilabetetik sobratu zaizkion guztiak salduko ditu, prezioan 40€ -ko beherapena eginez.

p=150€prezioan, berriz, lehenengo hilabetean beti, eskaria honela banatzen dela uste da:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(x)$	0.10	0.10	0.20	0.20	0.10	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05

Prezio horretan, bigarren hilabetean lehenengo hilabetetik sobratu zaizkion guztiak salduko ditu, prezioan 50$e$ko beherapena eginez.

Lehen hilabetean saltzen dituen inprimagailuen biltegi-kostua 10€da, eta bigarren hilabetean saltzen direnei 15€gehitu behar zaie kontzeptu beragatik.

Egin beharreko atazak:

(i) Zein prezio jarri behar du itxarondako mozkinak maximotzeko?

(ii) Zein da 150€- ko prezioan jarrita erabaki beharreko beherapenaren muga, prezio bataren eta bestearen artean indiferentziaz erabakitzeko?

PROBLEMA

Zorizko aldagai bat dentsitate funtzio honen arabera banatzen direla uste da (m parametro bat da, 5,10, 15 eta 20 balioak hartzen ditzakeena):

$$f(x) = \frac{1}{20m}\ ;\ 2000 - 10m < x < 2000 + 10m$$

Egin beharreko atazak:

(i) Froga ezazu m parametroa dela.

(ii) Kalkulatu itxaropena eta desbideratze estandarra, m parametroaren mendean.

(iii) Nola bilakatzen da desbideratzea, m parametroaren arabera?

(iv) Kalkulatu $P[X > 2000 + 8m]$ eta $P[X > 2000 + 9m]$, m zehaztu gabe.

(iv) Hurbildu $P[X > 2000 + 8m]$ eta $P[X > 2000 + 9m]$, m zehaztu gabe, suposatuz itxaropena eta desbideratzea besterik ez duzula ezagutzen, hau da, Txebixeven ezberdintza erabiliz.

(iv) Zein probabilitateri buruz egiten du Txebixeven ezberdintzak hurbilketa zehatzen edo gertuena?