POISSON BANAKETAREN HURBILKETA NORMALA

Ariketak

Egilea: Josemari Sarasola

Gizapedia

gizapedia.hirusta.io

Problema: Poisson banaketaren hurbilketa normala

Orduro 0.8 koronabirus gaixo sartzen dira ospitale batera batezbeste, gau eta egun, zoriz eta erabateko independentziaz.

(a) Zenbat da astebetean 150 gaixo baino gehiago sartzeko probabilitatea, gaixotasuna zabaltzeko erritmoa mantentzen bada?

(b) Zenbat da juxtu 160 gaixo sartzeko probabilitatea?

(c) Zenbat gaixo ziurta daitezke gehienez 0.98ko probabilitatearekin?

(d) Gaixo bakoitzak maskara bat behar badu, zenbat maskara eduki behar dira prest aste bakoitzean, maskara nahikoa izateko probabilitatea 0.999 izan dadin? Zergatik da eskatzen den probabilitatea hain handia?

(e) Astero gainera aurreko astean sartutako gaixoen espediente bereziak prestatu behar dira, ikerketa-zentro batera bidaltzeko. Langile batek 14 espediente prestatzen baditu astean, zenbat langile behar dira aurreko asteko espdiente guztiak prestatu ahal izateko probabilitatea 0.9 izan dadin?

(f) Ospitalean 700 maskara daude eskuragarri. Zenbat astetarako daukagu nahikoa 0.99ko probabilitateaz?

(g) Ospitalean 200 maskara daude eskuragarri bi astetarako. Zenbateraino murriztu beharko litzateke sarrera-tasa bi aste horietarako nahikoa izateko probabilitatea 0.98 izateko?

Ebazpena: Poisson banaketaren hurbilketa normala

Orduro 0.8 koronabirus gaixo sartzen dira ospitale batera batezbeste, gau eta egun, zoriz eta erabateko independentziaz.

(a)

Zenbat da astebetean 150 gaixo baino gehiago sartzeko probabilitatea, gaixotasuna zabaltzeko erritmoa mantentzen bada?

Zoriz eta erabateko independentziaz izanik, gaixo kopurua Poisson banaketaren araberakoa da. Astebeteko lambda parametroa hau da: $\lambda = 0.8 \times 7 \times 24 = 134$.

Lambda aski handia den ezkero ($\lambda \geq 30$), hurbilketa normala erabil daiteke:

$$X: \textit{ astebeteko gaixoak } \sim P(\lambda = 134.4) \to N(\mu = 134.4, \sigma = \sqrt{134.4} = 11.59)$$

Jarraitutasun-zuzenketa aplikatuz:

$$P[X > 150] = P[X > 150.5] = P\left[Z > \frac{150.5 - 134.4}{11.59}\right] = 0.0824$$

(b)

Zenbat da juxtu 160 gaixo sartzeko probabilitatea?

Jarraitutasun-zuzenketa aplikatuz:

$$P[X = 160] = P[159.5 < X < 160.5] = P\left[\frac{159.5 - 134.4}{11.59} < Z < \frac{160.5 - 134.4}{11.59}\right] = P[2.16 < Z < 2.25] = 0.0031$$

(c)

Zenbat gaixo ziurta daitezke gehienez 0.98ko probabilitatearekin?

Jarraitutasun-zuzenketa ere aplikatzen dugu kasu honetan, ez egiteagatik sortzen den diferentzia oso txikia den arren:

$$P[X \leq x] = P\left[Z < \frac{x + 0.5 - 134.4}{11.59}\right] = 0.98 \to \frac{x + 0.5 - 134.4}{11.59} = 2.05 \to x = 157.65 \to 158$$

Ziurta daiteke 158 gaixo edo gutxiago egongo direla 0.98 probabilitateaz edo gehiago.

(d)

Gaixo bakoitzak maskara bat behar badu, zenbat maskara eduki behar dira prest aste bakoitzean, maskara nahikoa izateko probabilitatea 0.999 izan dadin? Zergatik da eskatzen den probabilitatea hain handia?

Eskatzen den probabilitatea hain handia da, gaixo bakoitzak bere maskara edukitzea afera kritikoa delako, hil ala bizikoa.

Eduki beharreko maskara kopurua x izendatuz, nahiko izango dira gaixo kopurua x edo txikiagoa denean. Jarraitutasun-zuzenketa ere aplikatzen dugu:

$$P[X \leq x] = P\left[Z < \frac{x + 0.5 - 134.4}{11.59}\right] = 0.999 \to \frac{x + 0.5 - 134.4}{11.59} = 3.09 \to x = 169.7 \to 170$$

Beraz, 171 maskara beharko dira.

(e)

Astero gainera aurreko astean sartutako gaixoen espediente bereziak prestatu behar dira, ikerketa-zentro batera bidaltzeko. Langile batek 14 espediente prestatzen baditu astean, zenbat langile behar dira aurreko asteko espediente guztiak prestatu ahal izateko probabilitatea 0.9 izan dadin?

Aurreko puntuan bezalaxe planteatzen dugu, 0.9ko probabilitateaz gehienez ziurta daitezkeen espedienteen kopurua kalkulatuz:

$$P[X \leq x] = P\left[Z < \frac{x + 0.5 - 134.4}{11.59}\right] = 0.9 \rightarrow \frac{x + 0.5 - 134.4}{11.59} = 1.28 \rightarrow x = 149.23$$

Langile bakoitzak 14 espediente behar dituenez, $149.23/14 = 10.66$ langile beharko dira. Gehiezgiz zehaztu behar da, motz ez geratzeko, beraz 11 langile beharko dira, eta horiekin sortzen diren espediente guztiak kudeatzeko probabilitatea 0.9 izango da gutxienez.

(f)

Ospitalean 700 maskara daude eskuragarri. Zenbat astetarako daukagu nahikoa 0.99ko probabilitateaz?

Lambda parametroa hau da n astetarako: $\lambda = 134.4n$. Beraz, baliatu beharreko hurbilketa normala hau izango da:

$$X \sim N(\mu = 134.4, \sigma = \sqrt{134.4n} = 11.59\sqrt{n})$$

700 maskara nahiko izango dira 700 gaixo edo gutxiago daudenean aste horietan:

$$P[X \leq 700] = P[X < 700.5] = P\left[Z < \frac{700.5 - 134.4n}{11.59\sqrt{n}}\right] = 0.99 \rightarrow \frac{700.5 - 134.4n}{11.59\sqrt{n}} = 2.32$$

$n = x^2$ aldagai aldaketa eginez, eta erro negatiboa baztertuz (σ negatiboa meaten baitu), $x = 2.18$, eta beraz $n = 4.75$. Aste osoak zenbatzen baditugu (adibidez maskara eskaerak astero heltzen direnean), 4 astetarako izango dugu nahikoa 0.99 probabilitateaz 700 maskararekin.

(g)

Ospitalean 200 maskara daude eskuragarri bi astetarako. Zenbateraino murriztu beharko litzateke sarrera-tasa bi aste horietarako nahikoa izateko probabilitatea 0.98 izateko?

Bi astetarako lambda parametroa, λ asteko tasa ezezagunarekin 2λ da. Hurbilketa normala hau izango da:

$$X \sim N(\mu = 2\lambda, \sigma = \sqrt{2\lambda} = 1.41\sqrt{\lambda})$$

200 maskarak nahikoa dira 200 gaixo edo gutxiago sartzen direnean:

$$P[X \leq 200] = P[X < 200.5] = P\left[Z < \frac{200.5 - 2\lambda}{1.41\sqrt{\lambda}}\right] = 0.98 \rightarrow \frac{200.5 - 2\lambda}{1.41\sqrt{\lambda}} = 2.05$$

$x = \sqrt{\lambda}$ eginez, $x = 9.31$ (erro negatiboa baztertuz). Beraz, $\lambda = 9.31^2 = 86.67$, asteko betiere, eta beraz orduko:

$$\lambda = \frac{86.67}{24 \times 7} = 0.51$$

Gaixoen tasa orduro 0.51ra murriztu beharko litzateke, 0.9tik.