

Probabilitate desberdintzak

Josemari Sarasola

Gizapedia



Zertarako probabilitate-desberdintzak?

Zorizko aldagai bati dagokion probabilitate-banaketa ezaguna ez denean, probabilitateak ezin dira zehatz kalkulatu. Baina batezbestekoa, desbideratzea eta banaketaren beste ezaugarri batzuk ezagutzen diren kasuetan, probabilitatea hurbildu egiten duten formula batzuk daude: **probabilitate-desberdintzak** dira. Desberdintza horiek probabilitate jakin bat zehatz kalkulatzeko ez badute ere, probabilitate horren muga bat ematen dute: balio zehatz batetik gora edo behera egongo den alegia. Hainbat probabilitate-desberdintza daude, baina guk hauek ikasiko ditugu:

- Txebixev-en desberdintza
- Txebixev-en desberdintza + simetria
- Txebixev-en desberdintza tarte asimetrikoetarako
- Txebixev-Cantelli-ren desberdintza
- Vysochanski-Petunin-en desberdintza
- Markov-en desberdintza

Probabilitate-desberdintzak

Txebixeven desberdintza

- μ eta σ beste ezer ez dakigunean erabiltzen da.
- Desberdintzak bi aldera ditu, *kanpoko* probabilitatea eta *barruko* probabilitatea.
- kanpoko probabilitatearen formula:

$$P(|X - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

- barruko probabilitatearen formula:

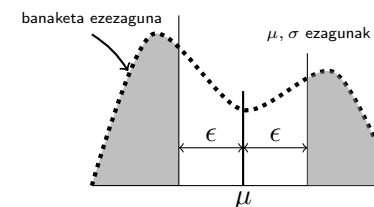
$$P(|X - \mu| < \epsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

Probabilitate desberdintzak

Txebixev-en desberdintza: kanpoko probabilitatea

- kanpoko probabilitatea:

$$P(|X - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

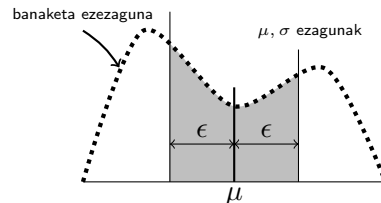


Probabilitate desberdintzak

Txebixev-en desberdintza: barruko probabilitatea

- barruko probabilitatea:

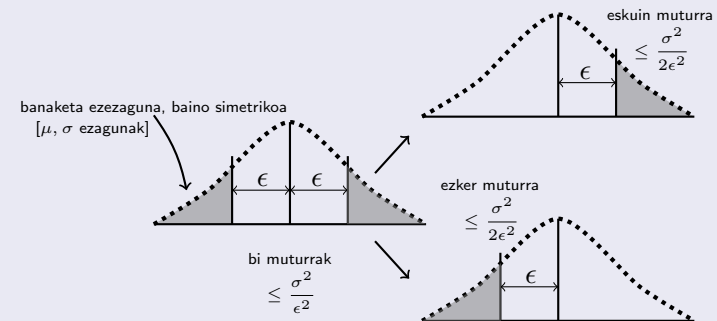
$$P(|X - \mu| < \epsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$



Probabilitate desberdintzak

Txebixev-en desberdintza: simetria gaineratuz

Txebixev-en ezberdintza erabiltzean, μ itxaropenaz eta σ^2 bariantzaz gainera, banaketa simetrikoa dela ere uste denean, mutur bakarreko probabilitateak hurbildu daitezke, besterik gabe bi muturreko kanpoko probabilitateak zati 2 eginez.



Probabilitate desberdintzak

Txebixev-en formula asimetrikoa

Txebixev-en jatorrizko formulak tarte simetrikoen probabilitateak hurbiltzen ditu. Txebixev-en formula garatuz tarte asimetrikotarako probabilitateak ere hurbildu daitezke:

$$\text{kanpoko formula: } P(|X - a| \geq b) \leq \frac{\sigma^2 + (\mu - a)^2}{b^2}$$

$$\text{barruko formula: } P(|X - a| < b) \geq 1 - \frac{\sigma^2 + (\mu - a)^2}{b^2}$$

Probabilitate desberdintzak

Txebixev-Cantelli-ren desberdintza

Txebixev-Cantelli-ren desberdintza μ eta σ^2 besterik ezagutzen ez direnean erabiltzen da, Txebixev-en desberdintza ohikoa bezalaxe, baina alde biko probabilitatea hurbildu ordez, alde bakarreko probabilitatea hurbiltzen du. Bi bertsio hauek ditu, a izanik μ -tik muturreko tarterako distantzia:

$$\text{goiko muturra: } a > 0, \quad P[X \geq \mu + a] \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

$$\text{beheko muturra: } a > 0, \quad P[X \leq \mu - a] \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

Vysochanski-Petunin-en desberdintza

Vysochanski-Petunin-en desberdintza μ eta σ^2 besterik ezagutzen ez direnean erabiltzen da, Txebixev-en desberdintza ohikoa bezalaxe, gehituz **banaketa moda (gailur) bakarrekoa izan behar dela**. Txebixev-en desberdintzak bezalaxe bi muturretako probabilitatea hurbiltzen du, baina hura hobetuz, probabilitatearen muga 4/9 faktore batez bidertzen duelako:

$$P(|X - \mu| \geq \lambda\sigma) \leq \frac{4}{9\lambda^2}$$

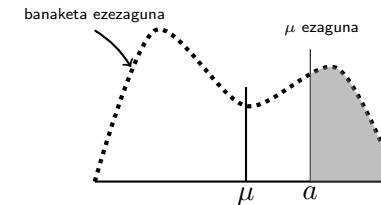
Aplika daiteke soilik $\lambda > 1.633$ betetzen denean.

Gainera, banaketa simetrikoa bada, mutur bakoitzeko probabilitatea zehatzago eman daiteke, probabilitatearen muga zati bi eginez.

Markov-en desberdintza

μ (itxaropena) beste ezer ezagutzen ez denean erabiltzen da, betiere zorizko aldagaiak beti balio positiboak hartzen baditu:

$$a > 0, \quad P[X \geq a] \leq \frac{\mu}{a}$$



Desberdintza	Zer dakigu?	Zertarako?
Txebixev arrunta	μ, σ	kanpo (bi mutur), barru
Txebixev+sim	$\mu, \sigma, \text{simetria}$	mutur bat ($\leq \frac{\sigma^2}{2\epsilon^2}$)
Txebixev asimetrikoa	μ, σ	tarte asim.
Txebixev-Cantelli	μ, σ	mutur bat
Vysochanski-Petunin	$\mu, \sigma, \text{moda bakarra}$	kanpo, barru
Markov	μ	goiko muturra

Ariketa gehigarriak: 1

Dado bat botata, kalkulatu $P[X \geq 6]$ eta gero hurbildu probabilitatea Txebixev-en desberdintzaren, Txebixev-Cantelli-ren desberdintzaren nahiz Markov-en desberdintzaren bitartez. Halaber, hurbildu ezazu Txebixev-en ezberdintzaren bitartez, jakinik banaketa simetrikoa dela. Emaitzak alderatu.

Ariketa gehigarriak: 2

Eguneko salmentak denda batean batezbeste 100 izango direla aurreikusten da. Zenbatekoa da salmentak 250 baino handiagoak izateko probabilitatea? Eta 150 baino txikiagoak izateko probabilitatea?

Ariketa gehigarriak: 3

Taberna batean egunero eskatzen den ogitarteko kopurua batezbestez 100 da. Desbideratzea 10 ogitarteko da. Zenbat opil erosi behar dira eskatzen diren ogitarteko guztiak egiteko nahikoa izateko probabilitatea 0.9 izan dadin? Kalkuluak Txebixev-en desberdintzaren (simetria suposatuz), Txebixev-Cantelliren nahiz Markov-en desberdintzaren bidez egin itzazu eta alderatu emaitzak.

Ariketa gehigarriak: 4

Frogatu Txebixev-en desberdintzaren aukerako adierazpen hau, teorian ikasitako desberdintzaren adierazpenetik:

$$P(|X - \mu| \geq \lambda\sigma) \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

Alderatu ezazu Vysochanski-Petunin-en desberdintzarekin eta adierazi ezazu zein den zehatzena, zenbateraino eta zergatik.

Ariketa gehigarriak: 5

Banaketa bati buruz hauek dakizkigu: $\mu = 100$, $\sigma = 20$.

- (a) Irudikatu $P[|X - 100| \geq 40]$ emandako informazioarekin, eta ondoren moda bakarrekoa dela suposatuz.
- (b) Irudikatu $P[X \leq 60]$ (i) emandako informazioarekin, eta ondoren moda bakarrekoa dela suposatuz. (ii) banaketa simetrikoa dela dakigula gaineratuz, eta ondoren moda bakarrekoa dela suposatuz.
- (c) Hurbildu arestian irudikatutako sei probabilitateak, eta emaitzak interpretatu.

Ariketa gehigarriak: 6

Batez besteko ekoizpena egun batean 1000 litro da, 200 litroko desbideratzearekin. Hurbildu ekoizpena 600-1600 tartean izateko probabilitatea.