Gizapedia
gizapedia.hirusta.io

Proba parametrikoak

Ariketak eta ebazpenak

Josemari Sarasola, 2017

PROBA PARAMETRIKOAK: ARIKETAK

Ariketak. Zenbatesleen lagin banaketak

1. Populazio bat elementu hauek osatzen dute: 1-2-3. Hiru tamainako zorizko laginketa itzuleraduna eginda, eman ezazu lagin-batezbestekoaren lagin-banaketa eta interpretatu ezazu.

Ariketak. Batezbestekoari buruzko probak

2. Denda bateko eguneko salmentak banaketa normalari jarraiki banatzen dira, 100eko desbideratzeaz. Ohiko egun batean salmentak 1000 dira batezbestez. 10 egunetan batez besteko salmenta 1100 izan da. Batezbestekoa igo dela baiezta al daiteke? Ebatzi p-balioaren zein eremu kritikoaren bitartez. Adierazgarritasun-maila: %5.

3. Populazio normal batean datu hauek jaso dira: 22-26-24-24-25-23.
   (a) Populazio batezbestekoa 22 delako hipotesia frogatu behar da. Adierazgarritasun-maila: %10.
   (b) Bidenabar, bestelako kalkulurik gabe, beste zeintzuk hipotesi baztertu edo onartu behar dira?
   (c) 8 datu hartuta, lagin batezbestekoa 28 suertatu da, eta lagin bariantza 2. Populazio batezbestekoa igo dela baieztatzeko arrazoirik ba al dago? Adierazgarritasun-maila: %1.
   (d) Lagin-batezbestekoaren balio kritikoa eta erabakia horren arabera hartu.

4. Hegaldi baten batez besteko iraupena 300 minutukoa dela ezarri da hipotesi nulutzat. Iraupenen desbideratzea 40 minutukoa dela dakigu, baina banaketa ezin da zehaztu. 100 hegaldiren batezbestekoa 310 minutu suertatu da. Proba ebatzi p-balioaz zein eremu kritikoaz. Adierazgarritasun-maila: %5.

5. Ustez banaketa esponentzialaz banatzen diren 50 iraupen-denbora jaso dira. Normalean batez besteko iraupena 100 minutu da. Batez besteko iraupena jaitsi ote den erabakitzeko proba estatistikoa diseinatu. Adierazgarritasun-maila: %5.

6. 80 familien ur-kontsumoak jaso dira: $\overline{x} = 7$; $\sum x_i^2 = 4300$. Kontsumoak gamma izeneko banaketa baten araberakoak dira, eta hari buruz batezbestekoa eta bariantza ez ditugu ezagutzen.
   (a) Erabaki p-balioaz populazioaren batezbestekoa 7.5 edo handiagoa izan daitekeen. Adierazgarritasun-maila: %1.
   (b) Erabaki orain batezbestekoa 7.5 baino txikiagoa izan daitekeen. Adierazgarritasun-maila: %1.

7. Osagai baten iraupena normal banatzen da, desbideratzea 4 egunekoa izanik. Kalitate-betebeharrek batez besteko iraupena gutxienez 10 egunekoa izatea eskatzen dute. 9 daturen batezbestekoa 8 suertatu da. Betebeharra betetzen den (edo ez) erabaki. Adierazgarritasun-maila: %1.

8. Makina baten ekoizpena orduko 40 unitatekoa izaten da batezbestez eta banaketa normalaren araberakoa dela uste da. Datuak independenteak izan daitezen, aste ezberdinetako 4 ordutako ekoizpenak jaso dira: 38-39-35-36. Zer erabaki behar duzu datu horiek hartuta batezbesteko orduko ekoizpenari buruz? Adierazgarritasun-maila: %5. Ebazpena t estatistikoarekin nahiz $\overline{x}$ batezbesteko aritmetikoarekin burutu.

Ariketak. Proportzioari buruzko probak

9. Merkatu bateko kontsumitzaileen %26ak ziren enpresa bateko bezeroak iaz. Aurten zoriz aukeraturiko 200 kontsumitzaileen artean 44k bezero izaten jarraitzen dutela adierazi dute. Aurtengo datuekin erabaki bat hartu iazko proportzioaren bilakaerari buruz. Adierazgarritasun-maila: %5. Proba p-balioaren metodoa nahiz balio kritikoaren metodoa baliatuz burutu behar da.

10. Hornitzaile batek pieza guztietatik akastunak gehienez %4 direla baieztatzen du. Susmoak ditugu hori ez dela horrela. Gure susmoak frogatzeko, 200 pieza zoriz aukeratu eta aztertzen dira. Adierazgarritasun-maila %10 izanik, zenbat pieza izan behar dira akastun hornitzaileak dioena baztertzeko? (Hau da, balio kritikoa kalkulatu proba diseinatzeko) Eta %5 bada? eta %1 bada? Osatu taula bat emaitzetatik eta atera ezazu ondorioren bat.

Ariketak. Bariantzari buruzko probak

11. Populazio normal batean, 10 datu jaso eta lagin bariantza (zuzendu gabea) 36 suertatu da. Populazioaren desbideratze estandarra 5 edo txikiagoa delako hipotesia frogatu behar da. Adierazgarritasun-maila: 0.01

12. Marka bateko 2 pilula probiotikoetan dauden *L. acidophilus* mikroorganismoen kopuruak jaso dira, ehunka miliotan: 2.2, 4.2. Kalitate-betebeharrek kopuru horren bariantza 2 baino txikiagoa izan behar dela ezartzen dute, besteak beste. Baldintza betetzen al da? Adierazgarritasun-maila: 0.10.

PROBA PARAMETRIKOAK: ARIKETEN EBAZPENAK

Ariketak. Zenbatesleen lagin banaketak

1. ariketa

POPULAZIOA: 1-2-3 $\rightarrow \mu = \dfrac{1+2+3}{3} = 2$

3 tamainako lagin posibleak: $EA_{n=3}^{k=3} = 3^3 = 27$ (errepikatuzko aldakuntzak)

Laginak	$\overline{x}$	Probabilitatea
111	1	1/27
112	1.33	1/27
113	1.66	1/27
121	1.33	1/27
122	1.66	1/27
123	2	1/27
131	1.66	1/27
132	2	1/27
133	2.33	1/27
211	1.33	1/27
212	1.66	1/27
213	2	1/27
221	1.66	1/27
222	2	1/27
223	2.33	1/27
231	2	1/27
232	2.33	1/27
233	2.66	1/27
311	1.66	1/27
312	2	1/27
313	2.33	1/27
321	2	1/27
322	2.33	1/27
323	2.66	1/27
331	2.33	1/27
332	2.66	1/27
333	3	1/27

Emaitzak bilduz, lagin-batezbestekoaren lagin banaketa eskuratzen da:

$\overline{x}$	$p(\overline{x})$
1	1/27
1.33	3/27
1.66	6/27
2	7/27
2.33	6/27
2.66	3/27
3	1/27

Ohartu behar da beste populazio batekin eta beste lagin tamaina batekin, lagin-batezbestekoaren lagin-banaketa ezberdina suertatuko litzatekeela, lagin-batezbestekoaren ohiko banaketa teorikoetan ikus daitekeen bezala. Beste alde batetik, simetrikoa dela ere ikus daiteke. Ezaugarri hori mantentzen da lagin-tamaina guztietarako; izan ere, lagin tamaina handietan batezbestekoaren lagin-banaketa normala eta beraz simetrikoa ere badela.

Ariketak. Populazio-batezbesteko bati buruzko probak

2. ariketa

Galdera batezbestekoa igo ote den denez, aurkakoa hartzen dugu H_0-tzat, 2. mailako irizpidearen arabera:

$$H_0 : \mu < 1000$$

Populazioa normala eta σ ezagunak direnez, erreferentziazko lagin-banaketa hau izango da:

$$\overline{x} \sim N\Big(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big) : N\Big(1000, \frac{100}{\sqrt{10}}\Big) : N(1000, 31.62)$$

$H_0 : \mu < 1000$ baztertzen dugu, $\overline{x}$ denean oso handia. Baztertze-eremua goitik dago, beraz. p-balioaz ebatziz:

$$P[\overline{x} > 1100] = P\Big[Z > \frac{1100 - 1000}{31.62}\Big] = P[Z > 3.16] = 0.007 < \alpha$$

Eta H_0 baztertu behar da, eta μ batezbestekoa igo dela erabaki.

Eremu kritikoaren bitartez, gainetik α probabilitatea uzten duen balioa bilatu behar da lagin banaketan:

$$P[\overline{x} > \overline{x}_0] = P\Big[Z > \frac{\overline{x}_0 - 1000}{31.62}\Big] = 0.05 \to \frac{\overline{x}_0 - 1000}{31.62} = 1.64 \to \overline{x}_0 = 1051.85$$

Eremu kritikoa hau da: $\overline{x} > 1051.85$. Suertatu zaigun batezbestekoa horren barruan dagoenez, H_0 baztertu egiten da.

3. ariketa

(a) ataleko ebazpena

Proba ebazteko lehen pausoa hipotesi nulua finkatzea da. Kasu honetan ez dago zalantzarik, enuntziatuak berak adierazten duelako, beraz, 1. mailako irizpidearen arabera:

$$H_0 : \mu = 22$$

Noski, lagin-batezbestekoa (24 da, ohi bezala kalkulatuta) parametroaren balio horretatik zenbat eta urrutiago egon, alde batera zein bestera, orduan eta arrazoi handiagoz baztertuko da parametroari buruz hipotesi nuluak zehaztutako balioa. Beraz proba alde bikoa da.

Parametroa populazio-batezbestekoa da ($\mu = 22$, H_0-pean betiere), horren zenbatesle logikoa lagin batezbestekoa, eredu normal batean, desbideratzea ezezaguna izanik. Egoera honetan, proba ebazteko estatistiko hau, bere lagin banaketarekin, erabiltzen da:

$$t = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

Hain zuzen, $\overline{x}$, eta hedaduraz t, oso handia nahiz oso txikia denean, baztertuko da hipotesi nulua.

Proba alde bikoa denez, 0.10/2=0.05eko probabilitatea utzi beharko da mutur bakoitzean. 6 datu edukita, erreferentziazko banaketa t_5 da. Horretan, azpitik eta gainetik 0.05eko probabilitatea uzten duten balioak ± 2.02 dira.

Orain, emandako datuekin t estatistikoa kalkulatzen dugu:

$$\overline{x} = 24; \ \hat{s} = \sqrt{\frac{(22-24)^2 + \cdots + (23-24)^2}{6-1}} = 1.41; \ t = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}} = 3.46$$

t estatistikoaren balioa eremu kritikoan dago, 2.02 balio kritikoa baino handiagoa denez, eta beraz hipotesi nulua baztertu egin behar da.

Ohartu behar da ezin dela p-balioaren metodoa baliatu, Student t taulak ez baititu probabilitateak ematen, baizik eta probabilitate jakin batzuetarako balio zehatzak.

(b) ataleko ebazpena

$H_0 : \mu = 22$ goitik baztertu dugu, $\overline{x} = 24$ izan dugunez. Beraz, are eta arrazoi handiagoz baztertuko genituzke $H_0 : \mu = 21$, $H_0 : \mu = 20$ eta oro har 22tik behera dauden populazio-batezbestekoaren balio guztiak.

$H_0 : \mu = 23$ eta oro har 22tik gorako balioa duten hipotesiei buruz, berriz, ezin baiezta daiteke onartu edo baztertu behar diren.

(c) ataleko ebazpena

Galderak frogatu nahi dena adierazten du, eta horren aurkakoa (batezbestekoa jaitsi dela) hartu behar dugu hipotesi nulutzat: $H_0 : \mu < 22$.

Hipotesi nulua $\overline{x}$, eta hedaduraz t estatistikoa, handiak direnean baztertuko dugu. Beraz, eremu kritikoa goitik dago. Hala, eremu kritikoa emateko, nahikoa dugu gainetik 0.01eko probabilitatea (azpitik 0.99) uzten duen balioa zehaztea t_{8-1} batean:

$$t_{8-1,0.01} = 3$$

Eremu kritikoa, baztertze-eremua alegia, 3 edo handiagoa da. Estatistikoaren balioa hau da:

$$t = \frac{28 - 22}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}} = 12$$

Beraz, hipotesi nulua baztertuta, batezbestekoa igo dela esan daiteke adierazgarritasun-maila horretarako.

(d) ataleko ebazpena

$$t_{8-1,0.01} = \frac{\overline{x}_0 - 22}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}} = 3 \rightarrow \overline{x}_0 = 23.5$$

Lagin-batezbestekoak 23.5eko balio kritikoa gainditzen duenez, hipotesi nulua baztertu egin behar da, eta batezbestekoa igo dela erabaki.

4. ariketa

Hipotesi nulu jakina ematen digutenez, hori hartzen dugu hipotesi nulutzat:

$$H_0 : \mu = 300$$

Desbideratzea ezaguna da: $\sigma = 40$. Populazioa normal denik ezin da baieztatu, baina lagin-tamaina handia denez, batezbestekoaren lagin banaketa hau da:

$$\overline{x} \sim N\Big(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big) : N\Big(300, \frac{40}{\sqrt{100}}\Big) : N(300, 4)$$

Proba alde bikoa da, hipotesi nulua $\overline{x}$ 300 baino aski handiagoa zein txikiagoa denean baztertzen baita. Gure kasuan, 310 suertatu denez, p-balioa honela kalkulatzen dugu:

$$P[\overline{x} > 310] = P\Big[Z > \frac{310 - 300}{4}\Big] = P[Z > 2.5] = 0.006 < \frac{\alpha}{2}$$

Proba alde bikoa delako alderatzen dugu p-balioa $\frac{\alpha}{2}$-rekin.

Ebaz dezagun orain eremu kritikoaren bitartez. Proba alde bikoa denez, eremu kritikoa bi muturretan banatuko da:

- goitik: $P[\overline{x} > \overline{x}_g] = P\Big[Z > \frac{\overline{x}_g - 300}{4}\Big] = 0.025 \rightarrow \frac{\overline{x}_g - 300}{4} = 1.96 \rightarrow \overline{x}_g = 307.84$
- behetik: $P[\overline{x} < \overline{x}_b] = P\Big[Z < \frac{\overline{x}_b - 300}{4}\Big] = 0.025 \rightarrow \frac{\overline{x}_b - 300}{4} = -1.96 \rightarrow \overline{x}_b = 292.16$

H_0 baztertuko da lagin-batezbestekoa 307.84 baino handiagoa denean eta 292.16 baino txikiagoa denean. 310 da suertatu denez, hipotsi nulua baztertu egiten da.

5. ariketa

Lagin-daturik ez dago. Beraz, eremu kritikoaren metodoa baliatu behar da derrigorrez (eta hortik proba *diseinatzea* eskatzearen arrazoia).

Batezbestekoa jaitsi den erabaki edo frogatu behar denez, aurkakoa suposatzen dugu (2. mailako irizpidea):

$H_0 : \mu = \frac{1}{\lambda} > 100$

Bariantza ez dute ematen baina atera egin daiteke batezbestekotik:

$$\lambda = \frac{1}{100} \rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2} = 10000 \rightarrow \sigma = \sqrt{10.000} = 100$$

Hipotesi nulua frogatzeko, lagin batezbestekoa erabiliko da. Honela banatzen da:

$$\overline{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Eta kasu honetan, orduan:

$$\overline{x} \sim N\left(100, \frac{\sqrt{10000}}{\sqrt{50}} = 14.14\right)$$

Iraupena jaitsi ote den erabaki behar denez, eta hori denez, beraz, hipotesi nuluaren alternatiba, eremu kritikoa ezkerrean izango da (lagin batezbestekoa *txikia* denean erabakiko da ustez 100 balio duen populazio batezbestekoa jaitsi dela, hipotesi nulua baztertzea alegia):

$$P[\overline{x} < \overline{x}_0] = P\left[Z < \frac{\overline{x}_0 - 100}{14.14}\right] = 0.05 \rightarrow \frac{\overline{x}_0 - 100}{14.14} = -1.64 \rightarrow \overline{x}_0 = 76.81$$

Lagin batezbestekoa 76.81 baino txikiagoa denean baztertuko da hipotesi nulua (hots, hori da eremu kritikoa), batezbestekoa jaitsi dela erabakitzeko.

6. ariketa

(a) atala

2. mailako irizpidea baliatuz, erabaki nahi denaren aurkakoa hartzen da hipotesi nulutzat:

$$H_0 : \mu < 7.5$$

Populazioa ez da normala (gamma banaketaren araberakoa baita) baina lagin-tamaina asko handia da ($n = 80 > 30$). Desbideratzea ezezaguna denez, zenbatetsi edo estimatu behar dugu $\hat{s}$ desbideratze zuzenduaren bitartez:

$$s^2 = \frac{4300}{80} - 7^2 = 4.75 \rightarrow \hat{s}^2 = \frac{80}{79} \times 4.75 = 4.81 \rightarrow \hat{s} = 2.19$$

Egoera honetan baliatu beharreko lagin-batezbestekoaren lagin-banaketa hau da:

$$\overline{x} \sim N\left(\mu, \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}\right) : N\left(7.5, \frac{2.19}{\sqrt{80}}\right) : N(7.5, 0.24)$$

Proba alde bakarrekoa da. H_0 baztertuko da lagin-batezbestekoa oso handia denean. Beraz, p-balioa honela kalkulatzen da:

$$P[\overline{x} > 7] = P\left[Z > \frac{7 - 7.5}{0.24}\right] = P[Z > -2.08] = 0.9812 > \alpha$$

Eta hipotesi nulua onartu egiten da: populazio batezbestekoa 7.5 baino txikiagoa dela. Lasaiera handiz onartu ere, printzipioz onartu egiten den hipotesi nuluak berez batezbestekoa 7.5 baino txikiagoa dela adierazteaz gainera, lagin-batezbestekoa 7.5 baino txikiagoa atera delako.

(b) atala

2. mailako irizpidea baliatuz, erabaki nahi denaren aurkakoa hartzen da hipotesi nulutzat:

$$H_0 : \mu > 7.5$$

Egoera honetan baliatu beharreko lagin-batezbestekoaren lagin-banaketa aurreko atalekoaren berdina da, hipotesi nuluaren muga-balioa (7.5) berdina denez:

$$\overline{x} \sim N(7.5, 0.24)$$

Proba alde bakarrekoa da. H_0 baztertuko da lagin-batezbestekoa oso txikia denean. Beraz, p-balioa honela kalkulatzen da:

$$P[\overline{x} < 7] = P\left[Z < \frac{7-7.5}{0.24}\right] = P[Z < -2.08] = 0.018 > \alpha$$

Eta hipotesi nulua onartu egiten da: populazio batezbestekoa 7.5 baino handiagoa dela.

Ariketa honetan garbi ikusten da hipotesi nulua behar bezala ezartzearen garrantzia, aurrez eta intuizioz uste daitekeenaz bestera, aurkako hipotesi nuluek ondorio ezberdinetara eraman gaitzaketelako.

7. ariketa

Populazioa normala eta σ ezaguna direnez, lagin banaketa hau baliatu behar da proba ebazteko:

$$\overline{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Hipotesi nulua finkatzerakoan 2. irizpidearen arabera zer erabaki behar den ez dago garbi (betebeharra betetzen den ala ez). Beraz, 3. irizpidera pasatzen gara:

Lagin batezbestekoak ($\overline{x} = 8$), populazio batezbestekoa 10 baino txikiagoa dela adieraziko luke. Aurkakoa hartzen dugu H_0-tzat, iraupena batezbestez 10 baino handiagoa dela alegia.

$$H_0 : \mu > 10$$

Horrela, $\overline{x}$-ren lagin banaketa honela geratzen da:

$$\overline{x} \sim N\left(10, \frac{4}{\sqrt{9}}\right) : N(10, 1.33)$$

p-balioaz ebatziko dugu, eremu kritikoaren bitartez ere ebatzi daitekeen arren. Hipotesi nulua baztertuko dugu $\overline{x}$ oso handia denean. Beraz, p-balioa edo arraroa goitik dago:

$$P[\overline{x} < 8] = P\left[Z < \frac{8-10}{1.33}\right] = P[Z < -2] = 0.03$$

p-balioa (0.03) α baino handiagoa denez, H_0 onartu egiten dugu, eta beraz batezbestekoa 8 izan arren, hori betebeharra betetzen ez dela baieztatzeko ebidentzia nahikoa ez dela erabaki behar da.

8. ariketa

Ez du hipotesi nulurik ematen eta zerbait jakinik frogatu edo erabaki behar dugun ere ez. Beraz, 3. mailako irizpideari, gertatuari alegia, erreparatu behar diogu hipotesi nulua zehazteko:

$$\overline{x} = 37$$

Beraz, badirudi orduko batezbesteko ekoizpena jaitsi dela. Aurkakoa hartuko dugu H_0-tzat:

$$H_0 : \mu > 40$$

Populazioa normala da eta horren desbideratzea ezezaguna. Beraz, t estatistikoa baliatu behar da, Student t_{4-1} banaketaren arabera banatuko dena. Horren taulako formatoa dela eta, eremu kritikoaren metodoa baliatu behar dugu ezinbestean.

Hipotesi nulua (μ handia) baztertuko da, $\overline{x}$ eta hedaduraz dagokion t estatistikoa txikiak direnean. Beraz, proba alde bakarrekoa da eta eremu kritikoa behetik dago. Zehatzago, eremu kritikoa azpitik %5eko probabilitatea uzten duen $t \sim t_{4-1}$ balioa emango luke: -2.35. Hortik behera, baztertu egingo genuke H_0.

Orain, datuekin suertatu zaigun t estatistikoa kalkulatu behar dugu:

$$\overline{x} = 37$$

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{(38-37)^2 + (39-37)^2 + (35-37)^2 + (36-37)^2}{4-1}} = 1.82$$

$$t = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}} = \frac{37-40}{\frac{1.82}{\sqrt{4}}} = -3.29$$

Balio kritikotik behera dagoenez, eremu kritikoan dago, eta beraz baztertu egin behar da H_0. Ekoizpena jaitsi egin dela erabaki behar da, beraz.

Lagin-batezbestekoaren bitartez ebatzi nahi bada:

$$t_{4-1,0.95} = \frac{\overline{x}_0 - 40}{\frac{1.82}{\sqrt{4}}} = -2.35 \rightarrow \overline{x} = 37.86$$

Lagin-batezbestekoaren balio kritiko horretatik behera baztertzen da hipotesi nulua. Kasu honetan, 37 suertatu denez, hala egiten dugu: hipotesi nulua baztertu eta ekoizpena jaitsi dela erabaki.

Ariketak. Proportzioari buruzko probak

9. ariketa

Hipotesi nulua zehazteko 1. eta 2. mailako irizpiderik ez dugunez, 3. mailakoa hartzen dugu: gertatuari erreparatzen diogu.

Lagin proportzioa honela kalkulatzen da:

$$\hat{p} = \frac{44}{200} = 0.22$$

Eta horrekin proportzioa jaitsi dela dirudienez, aurkakoa hartzen dugu hipotesi nulutzat:

$$H_0 : \textit{atxiki egiten da kuota} : \; p > 0.26$$

Beste alde batetik, hipotesi nulupeko $p = 0.26$ balio zehatza erreferentziatzat harturik, honela banatzen da lagin-proportzioa, lagin-tamaina handia dela kontuan harturik:

$$\hat{p} \sim N\left(0.26, \sqrt{\frac{0.26 \times 0.74}{200}} = 0.031\right)$$

p-balioaren metodoa

H_0 (proportzio handia, > 0.26) baztertuko da $\hat{p}$ txikia denean. Beraz, behetik harritzen gara. Proba ebazteko kalkulatu beharreko probabilitatea hau izango da orduan:

$$P[\hat{p} < 0.22] = P\left[Z < \frac{0.22 - 0.26}{0.031}\right] = P[Z < -1.29] = 0.098 > \alpha$$

Beraz, hipotesi nulupeko balioa onartu eta beraz, merkatu-kuota iaz bezala atxikitzen dela erabaki behar da.

Balio kritikoaren metodoa (edo eremu kritikoa)

Behetik harritzen garenez, bere *azpitik* %5eko probabilitatea uzten duen balioa zehaztu behar da lagin-proportzioaren banaketan:

$$P[\hat{p} < \hat{p}_0] = P\left[Z < \frac{\hat{p}_0 - 0.26}{0.031}\right] = 0.05 \rightarrow \frac{\hat{p}_0 - 0.26}{0.031} = -1.64 \rightarrow \hat{p}_0 = 0.209$$

Onartze-eskualdea $\hat{p}_0 > 0.209$ eta baztertze-eskualdea $\hat{p}_0 < 0.209$. Lagin-proportzioa onartze-eskualdean dago eta beraz, $p = 0.26$ balioa onartu eta merkatu-kuotak iazkoaren berdina izaten jarraitzen duela erabaki behar da.

10. ariketa

Susmoak ditugu akastunak %4 baino gehiago direla. Beraz, aurkakoa hartzen du hipotesi nulutzat 2. mailako irizpidearen arabera:

$$H_0 : p < 0.04$$

200 piezen datuak jaso gaude oraindik eta beraz proba diseinatzeko moduan soilik gaude (H_0 noiz onartu eta noiz baztertu). Horretarako, aukera bakarra dugu: eremu kritikoaren metodoa.

Hipotesi nulua baztertzen da, $\hat{p}$, 200 piezetan egongo diren akastunen proportzioa, handia denean. Beraz, proba alde bakarrekoa da eta eremu kritikoa goitik dago.

$\hat{p}$ zenbateslea honela banatzen da:

$$\hat{p} \sim N\left(0.04, \sqrt{\frac{0.04 \times 0.96}{200}}\right) : N(0.04, 0.01385)$$

Balio kritikoak kalkula ditzagun, emandako adierazgarritasun-mailetarako:

$$P[\hat{p} > \hat{p}_0] = P\left[Z > \frac{\hat{p}_0 - 0.04}{0.01385}\right] = 0.10 \rightarrow \frac{\hat{p}_0 - 0.04}{0.01385} = 1.28 \rightarrow \hat{p}_0 = 0.057 = \%5.7$$

$$P[\hat{p} > \hat{p}_0] = P\left[Z > \frac{\hat{p}_0 - 0.04}{0.01385}\right] = 0.05 \rightarrow \frac{\hat{p}_0 - 0.04}{0.01385} = 1.64 \rightarrow \hat{p}_0 = 0.062 = \%6.2$$

$$P[\hat{p} > \hat{p}_0] = P\left[Z > \frac{\hat{p}_0 - 0.04}{0.01385}\right] = 0.01 \rightarrow \frac{\hat{p}_0 - 0.04}{0.01385} = 2.32 \rightarrow \hat{p}_0 = 0.072 = \%7.2$$

Taula osa dezagun emaitzekin:

α	Eremu kritikoa
0.10	$\hat{p}_0 > \%5.7$
0.05	$\hat{p}_0 > \%6.2$
0.01	$\hat{p}_0 > \%7.2$

Zenbat eta α txikiagoa izan, orduan eta $\hat{p}_0$ handiagoa behar da H_0, hornitzaileak dioena alegia, baztertzeko; orduan eta akasutn gehiago eskatzen da hipotesi nulua baztertzeko. Horrela, $1 - \alpha$ magnitudeak hipotesi nuluarekin zenbateraino gauden sinetsita adieraziko luke. Beraz, orokorrean, zenbat eta sinetsiago izan H_0-rekin, orduan eta α txikiagoa jarri behar da.

Ariketak. Bariantzari buruzko probak

11. ariketa

Hipotesi jakin bat ematen digute frogatzeko eta hori bera hartuko dugu orduan H_0-tzat, 1. mailako irizpidearen arabera:

$H_0: \ \sigma < 5$

Hipotesi nulua baztertuko da, s (σ-ren estimatzailea), eta bidenabar s^2, oso handiak direnean, hots, $\frac{ns^2}{\sigma^2}$ estatistikoa ere oso handia denean. Beraz, eremu kritikoa goitik dago. Estatistikoari dagokion lagin-banaketa hau da:

$$\frac{ns^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Beraz, gure kasuan, χ^2_9 batean bere gainetik %1eko probabilitatea uzten duen balioa bilatu behar da: 21.7. Hortik gora izango da eremu kritikoa (baztertze-eremua).

Estatistikoak hartzen duen balioa hau da:

$$\frac{ns^2}{\sigma^2} = \frac{10 \times 36}{25} = 14.4$$

Horrela, hipotesi nulua onartu egin daiteke.

Ohartu behar da khi-karratu taularen formatoa dela eta, eremu kritikoaren metodoa soilik erabil daitekeela bariantzari buruzko frogetan.

12. ariketa

Baldintza betetzen den frogatu nahi denez, aurkakoa hartzen da hipotesi nulutzat, 2. mailako irizpidearen arabera:

$$H_0 : \sigma^2 > 2$$

Erabilitako beharreko estatistikoa eta horren banaketa hauek dira, populazioa normala dela jakinik:

$$\frac{ns^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{2-1}$$

Eremu kritikoa behetik dago, hipotesi nuluak dioena, populazioko bariantza handia dela alegia, s^2 lagin bariantza txikia denean baztertuko baita. Balio kritikoa 1 askatasun-mailako khi karratu batean azpitik %10eko probabilitatea uzten duen balioa da (gainetik %90):

$$\chi^2_{1,0.90} = 0.0158$$

H_0 baztertuko da, beraz, $\frac{ns^2}{\sigma^2}$ 0.0158 baino txikiagoa denean.

Kalkula dezagun s^2:

$$\overline{x} = 3.2$$

$$s^2 = \frac{(4.2-3.2)^2 + (2.2-3.2)^2}{2} = 1$$

Eta hortik:

$$\frac{ns^2}{\sigma^2} = \frac{2 \times 1}{2} = 1$$

Aurreko estatistikoaren balioa eremu kritikotik kanpo dago eta hipotesi nulua onartu behar da, baldintza ez dela betetzen alegia.

Ohartu behar da gertatuak, hots $s^2 = 1$, baldintza betetzen dela erakusten duela. Horrela, 3. mailako irizpidearen arabera, aurkakoa, alegia baldintza ez dela betetzen ($H_0 : \sigma^2 > 2$), hartu beharko litzateke H_0-tzat. Beraz, ez dago kontraesanik 2. eta 3. mailako irizpideen artean, eta horrela 3. irizpidearekin ebazpena berdina litzateke.

Beste alde batetik, enuntziatuaren haritik, ohartu behar da ohikoa dela industria bioteknologikoan printzipio aktibo edo sendagarriaren kopuruaren bariantza, jasotako laginetan, txikia izan behar dela ezartzea, printzipio aktibo horren kopurua tarte baten barruan, sakabanatze mugatuarekin, egon behar delako: printzipio aktiboaren kopurua txikiegia bada, efektu sendagarririk ez du izango; eta handiegia bada, arriskutsua izan daiteke. Beraz, gorabehera handiak (sakabanatze handia) saihestu behar dira.