

ESTADÍSTIKA ENPRESARA APLIKATUA

Azterketa ebatziak

2024-2025 ikasturtea

Donostiako Ekonomia eta Enpresa Fakultatea. EHU

Egilea eta irakasgaiaren irakaslea: Josemari Sarasola



Gizapedia

gizapedia.org

Ebazkizuna (2 puntu)

Bartzelonako IDIBELL ikerketa-laborategiak peptidoen laginen loteak erosten dizkio BCN PEPTIDES enpresari (peptido: aminoazidoek osaturiko molekula mota berezia). Lote bakoitzean 12 lagin daude. Zenbatetsi da lagin bakoitza akastuna izateko probabilitatea 0.13 dela. IDIBELL laborategiak lote osoa itzultzen dio BCN PEPTIDES enpresari lotean 2 lagin edo gehiago akastunak direnean.

Egin beharreko atazak:

- (a) (0.3 puntu) Adierazi analitikoki eta kalkulatu ahal bezain labur lote bat itzultzeko probabilitatea, suposatuz peptidoen laginak elkarrekiko independenteak direla.
- (b) (0.4 puntu) Zenbat da 3garren lagin akastuna aurkitu arte 6 lagin akasgabe izateko probabilitatea?
- (c) (0.3 puntu) Zenbat lagin akasgabe suertatzen dira batezbeste 3garren lagin akastuna aurkitu arte?
- (d) (0.5 puntu) IDIBELL laborategiaren datorren urteko aurrekontuan peptidoen laginen 20 lote erostea aurreikusten da. Loteak independenteak badira, nola banatzen da notazio laburrez adierazita 20 lote horietatik itzuliko den lote kopurua?
- (e) (0.2 puntu) Bilatu Larson-en nomograman (hurrengo orrian) 10 lote edo gutxiago itzultzeko probabilitatea.
- (f) (0.3 puntu) Eman aurreko probabilitatea kalkulatzeko R-ko agindua.

[a] Lote batean dauden lagin akastunen kopurua (X) honela banatzen da:

$$X \sim B(n = 12, p = 0.13)$$

Lote bat itzultzen da 2,3,4,... edo 12 lagin akastunak direnean. Kalkulu hori oso luzea denez, laburrago egiteko *buelta* ematen diogu:

$$P[\text{lotea itzuli}] = 1 - P[\text{lotea onartu}] = 1 - (P[X = 0] + P[X = 1]) = 1 - 0.13^0 \cdot 0.87^{12} \cdot \frac{12!}{0!12!} - 0.13^1 \cdot 0.87^{11} \cdot \frac{12!}{1!11!} = 0.4748$$

[b] Banaketa binomial negatiboaren formula baino ez da erabili behar. Eskatutakoa betetzeko 3garren akastuna izan arte, 6 lagin akasgabe eta 2 lagin akastun izan behar dira edozein ordenatan, eta ondoren 3garren lagin akastuna behar dugu izan. Beraz,

$$p = 0.87^6 \cdot 0.13^2 \cdot \frac{8!}{2!6!} \cdot 0.13$$

[c] Banaketa binomial negatiboaren itxaropenaren formula baliatuz, $r = 3$ eta $p = 0.13$ dela aintzat hartuz:

$$\mu = r \cdot \frac{q}{p} = 3 \times \frac{0.87}{0.13} = 20.07 \text{ lagin akastun}$$

[d] 20 loteetatik itzuliko den Y lote kopurua honela banatzen da:

$$Y \sim B(n = 20, p = 0.4748)$$

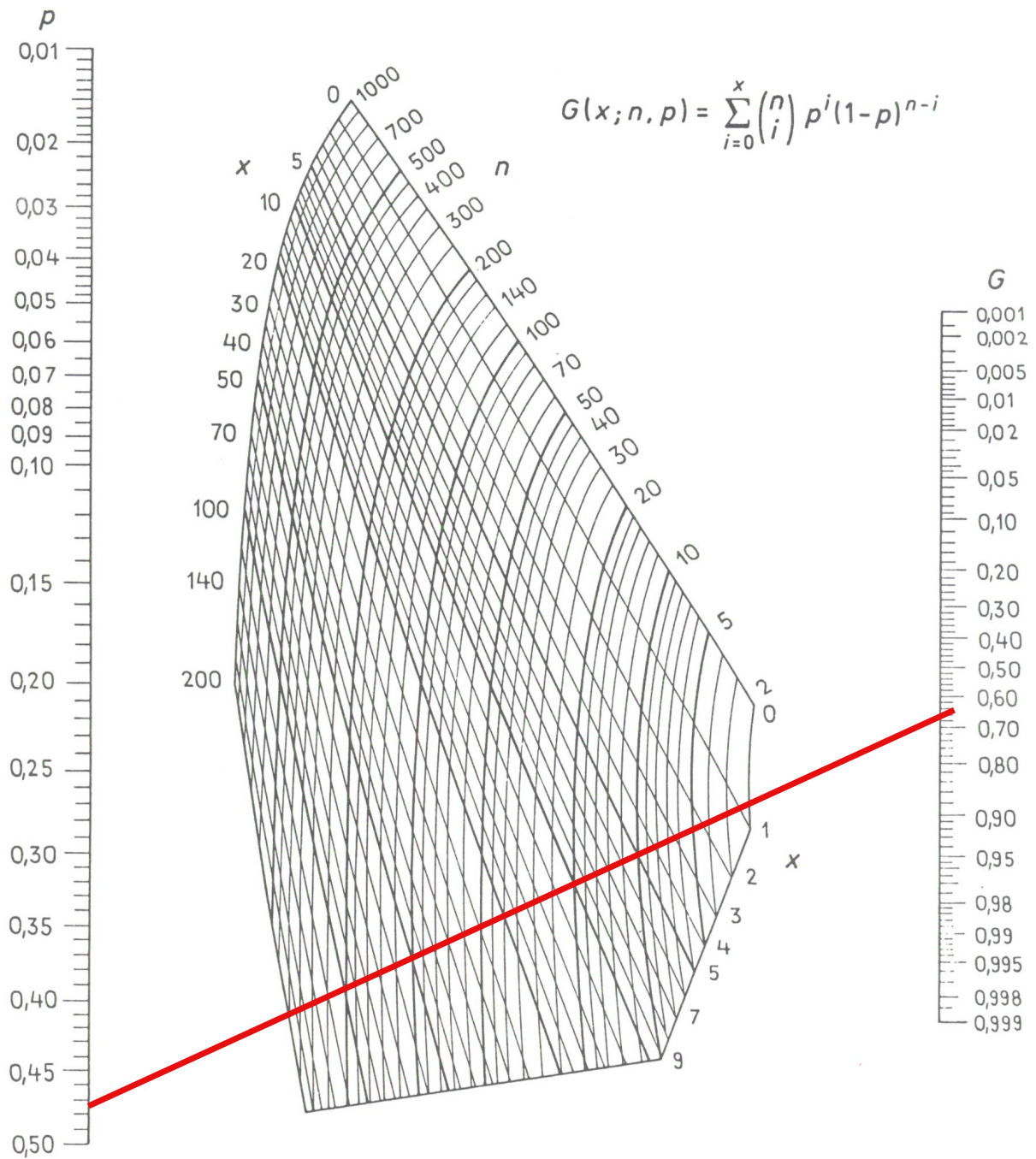
[e] Hurrengo orrialdeko irudia, ikusita, eskatutako probabilitatea 0.67 da gutxi gorabehera (eskuineko ardatzeko ebaki-puntua).

[f]

```
> pbinom(10,20,0.4748)
```

```
[1] 0.6740168
```

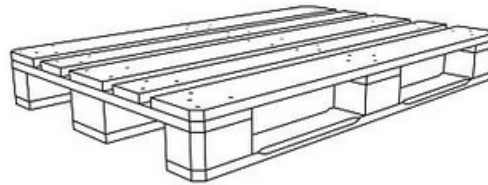
e



Ebazkizuna (2 puntu)

PALETS COLLSEROLA Bartzelona hiriko Horta auzoko lokal batean paletak jaso, behar denean berregokitu, eta saldu egiten dituen enpresa bat da. Saltzen dituen paleten artean palet europarrak daude, 120cmx80cm neurriko palet sendo homologatuak (ikus irudia); zenbakitutako xingola metaliko batez inguratu eta prezintatutako 22 unitateko meta edo zutabeetan saltzen dituenak. Berregokitutako paletak akatsak izaten dituztela eta, 22 paletako zutabe bakoitzean hantemenka (beraz, esan liteke zoriz) 4 palet akastun sartzen ditu nahita (takoa higituta, oholen bat luzean pitzatua, ...), palet guzti-guztietan betiere gutxieneko kalitate-maila bat ziurtatzen duen arren (takoa ez dago puskatuta, ohola ez dago zeharka hautsia).

Bezeroetako bat oso tiki-mikia da erosten dizkion paletekin, pisu handiko produktu astunak garraiatzeko erabiltzen baititu; hain zuzen ere, kalitate-kontrol zorrotza egiten die paletetara: erositako zutabe bakoitzetik **itzulerarik gabe** hartutako lehen 6 paletetan 2 palet akastun edo gehiago (lehen adierazi diren akatsekin) aurkitzen baditu, eskaerari dagokion fakturan 80 euroko deskontua exijitzen dio palet-zaleari.

**Egin beharreko atazak:**

- (0.8 puntu) Zenbatekoa da bezeroak palet meta edo zutabe batengatik deskontua eskatzeko probabilitatea? Kalkulua koefiziente binomial bitartez egin ezazu eta ahalik eta modu laburrenean garatuz.
- (0.4 puntu) Palet-zaleak nahiko balu deskontua egin behar izateko probabilitatea 0.2 baino txikiagoa izatea, zenbat palet akastun sartu beharko lituzke gehienez palet-meta bakoitzean? Probatuz aurki ezazu soluzioa, aurrekoan bezalaxe koefiziente binomialak erabiliz.
- (0.4 puntu) Bezeroak 20 palet-meta erosi dizkio. Zenbat da 320 euroko deskontua egin behar izateko probabilitatea?
- (0.4 puntu) Larson-en nomogramaren bitartez, kalkula ezazu 15 lote saltzen direnean, 2 lote edo gehiagoren deskontua egin behar izateko probabilitatea.

a

Kalitate-kontrolerako paleten aukeraketa zoriz eta itzulerarik egiten da. Beraz, banaketa hipergeometrikoaren formula baliatu daiteke probabilitateak kalkulatzeko:

X: 22 paletetatik aukeraturiko 6 paletetan zenbat palet akastun

$$P[\text{deskontu}] = P[X \geq 2] = 1 - P[X = 0] - P[X = 1]$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 - \frac{\binom{4}{0} \binom{18}{6}}{\binom{22}{6}} - \frac{\binom{4}{1} \binom{18}{5}}{\binom{22}{6}} \\
 &= 1 - \frac{1 \times \frac{18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}}{\frac{22 \times 21 \times 20 \times 19 \times 18 \times 17}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}} - \frac{4 \times \frac{18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}}{\frac{22 \times 21 \times 20 \times 19 \times 18 \times 17}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}} \\
 &= 1 - \frac{1 \times 18564}{74613} - \frac{4 \times 8568}{74613} = 0.2918
 \end{aligned}$$

b

Garbi dago deskontua egiteko probabilitatea murrizteko, palet akastunm gutxiago sartu behar dituela. Proba dezagun 3 palet akastunekin:

$$P[\text{deskontu}] = P[X \geq 2] = 1 - P[X = 0] - P[X = 1]$$

$$\begin{aligned} &= 1 - \frac{\binom{3}{0} \binom{19}{6}}{\binom{22}{6}} - \frac{\binom{3}{1} \binom{19}{5}}{\binom{22}{6}} \\ &= 1 - \frac{1 \times \frac{19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}}{\frac{22 \times 21 \times 20 \times 19 \times 18 \times 17}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}} - \frac{3 \times \frac{19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}}{\frac{22 \times 21 \times 20 \times 19 \times 18 \times 17}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}} \\ &= 1 - \frac{1 \times 27132}{74613} - \frac{3 \times 11628}{74613} \approx 0.1688 \end{aligned}$$

Beraz, 4 ordez 3 palet akastun sartu beharko lituzke.

c 320 euroko deskontua gertatzen da 20 palet-meta horietatik 4 palet itzuli direnean. Palet-metak itzultzeko probabilitatea konstantea da, 0.2918 alegia, eta palet-metak independenteak dira. Beraz, banaketa binomialaren formula erabil dezakegu.

Y: 20 palet-meta harturik zenbat itzuli

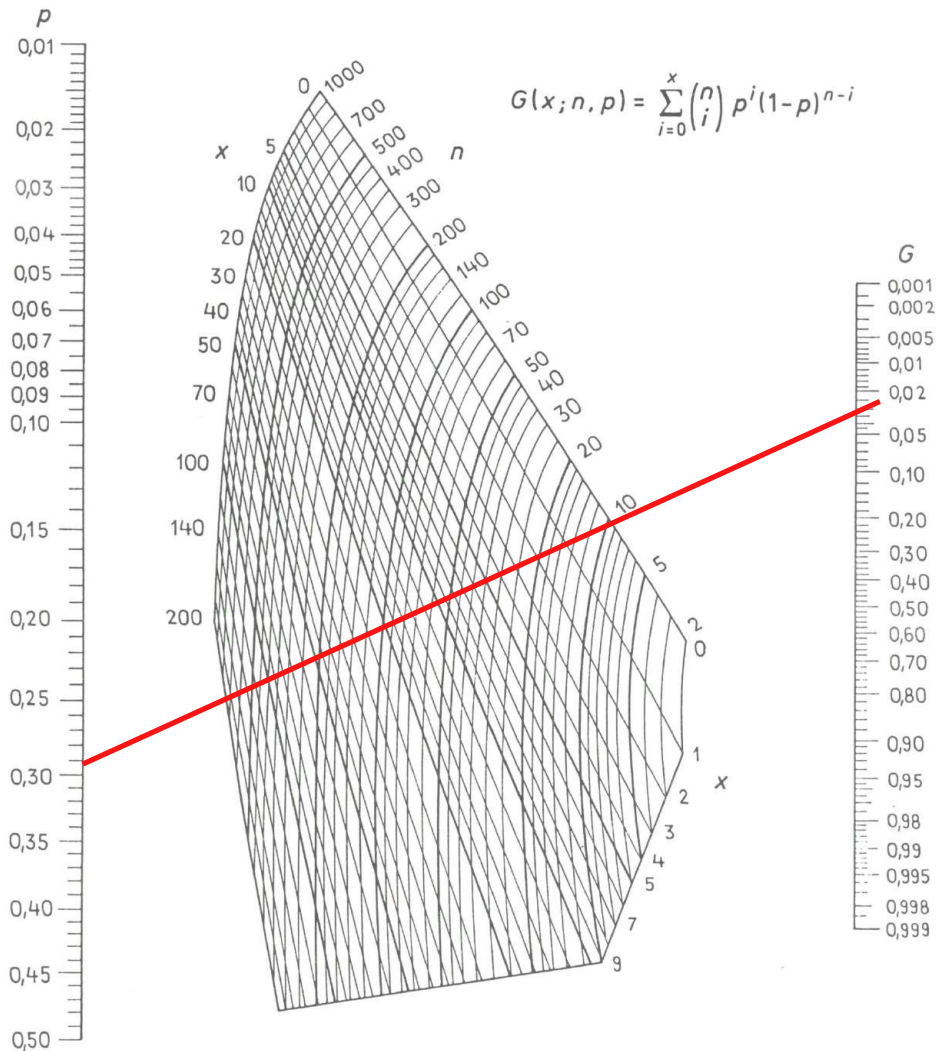
$$P[Y = 4] = 0.2918^4 \times (1 - 0.2918)^{16} \times \frac{20!}{4!16!} = 0.02$$

d

Larsonen nomogramak balio batetik beherako probabilitateak ematen dituenetz, eskatutako probabilitateari *buelta* eman behar diogu:

$$P[X \geq 2] = 1 - P[X \leq 1]$$

$p = 0.2918$, $n = 15$, eta $x = 1$ harturik:



Nomogramako probabilitatea 0.03 da gutxi gorabehera.

Beraz, eskatutako probabilitatea hau da, gutxi gorabehera baita ere noski:

$$P[X \geq 2] = 1 - P[X \leq 1] = 1 - 0.03 = 0.97$$

ESTADISTIKA ENPRESARA APLIKATUA (Eredu diskretuak)

Irakaslea: Josemari Sarasola

Ez-ohikoa

Ebazkizuna (2 puntu)

Lantegi batean doitasun handiko piezak egin behar dira. Hori dela eta, ohikoa da piezak baliogabeak izatea. Piezak independentziaz ekoizten dira baliogabea izateko probabilitatea 0.18 dela irizten da.

Egin beharreko atazak:

- (a) (0.6 puntu) Kalkulatu itzazu lehen pieza baliogabea izan arte 0, 1, 2, ..., 12 baliozko pieza izateko probabilitateak. Nola deitzen zaio probabilitateen banaketa horri?
- (b) (0.6 puntu) Kalkulatu lehen pieza baliogabea izan arte zenbat baliozko pieza izango diren batez beste.
- (c) (0.8 puntu) Pentsatu da agian Poisson-en banaketa ere baliozkoa izan daitekeela (a) ataleko probabilitateak kalkulatzeko. Poisson-en banaketaren parametro gisa aurreko ataleko batezbestekoa harturik, birkalkulatu (a) ataleko probabilitateak Poisson-en formularekin eta alderatu itzazu (a) ataleko probabilitateekin. Iruditzen zaizu Poisson-en banaketa egokia dela egiazko probabilitateak kalkulatzeko hurbilpen gisa? Zein da egiazko banaketaren eta Poisson-en banaketaren artean ikusten duzun diferentzia nabarmenena?

a

Banaketa geometrikoa baliatu behar da, lehen arrakasta izan arte dauden akastunen kopurua adierazten duen alegia. Banaketa horrek parametro bakarra du, p edo arrakastaren probabilitatea, kasu honetan 0.18 dena: $X \sim G(p = 0.18)$.

Eskatutako probabilitateak formula honen bitartez kalkulatzeko dira:

$$P(X = k) = q^k \cdot p = 0.82^k \cdot 0.18, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

k	$P(X = k)$	Emaitza
0	$0.82^0 \cdot 0.18$	0.180000
1	$0.82^1 \cdot 0.18$	0.147600
2	$0.82^2 \cdot 0.18$	0.121032
3	$0.82^3 \cdot 0.18$	0.099246
4	$0.82^4 \cdot 0.18$	0.081382
5	$0.82^5 \cdot 0.18$	0.066733
6	$0.82^6 \cdot 0.18$	0.054723
7	$0.82^7 \cdot 0.18$	0.044874
8	$0.82^8 \cdot 0.18$	0.036796
9	$0.82^9 \cdot 0.18$	0.030170
10	$0.82^{10} \cdot 0.18$	0.024732
11	$0.82^{11} \cdot 0.18$	0.020262
12	$0.82^{12} \cdot 0.18$	0.016582

b

Finean banaketa geometrikoaren batezbestekoa eman behar da:

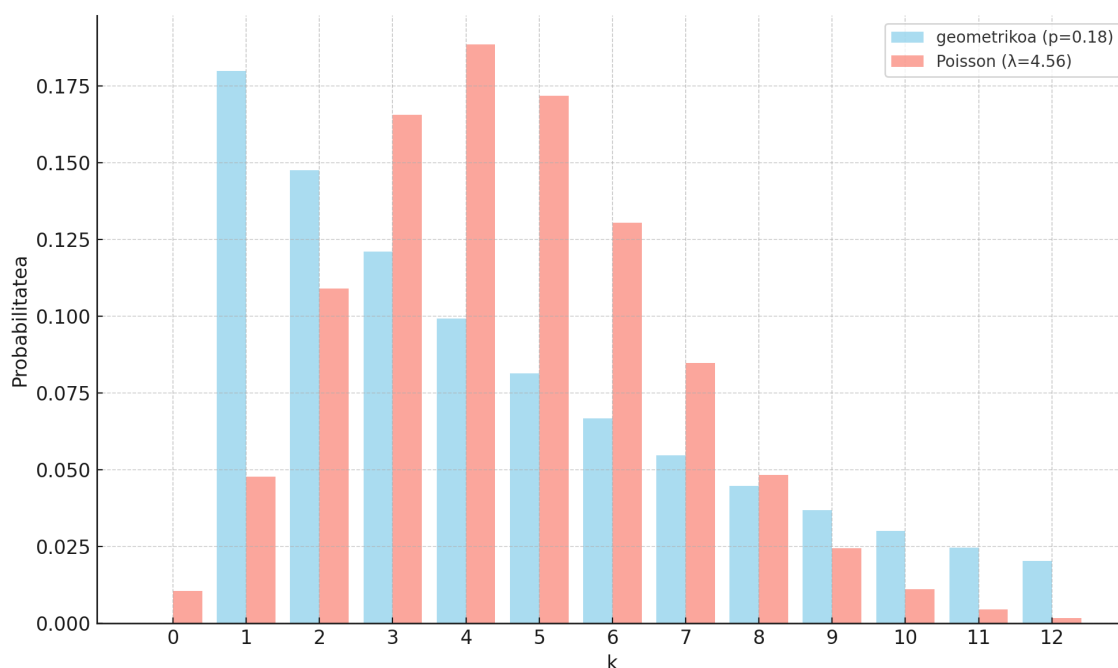
$$\mathbb{E}[X] = \frac{1-p}{p} = \frac{0.82}{0.18} \approx 4.56$$

Beraz, lehen akasgabea arte batez beste 4.56 pieza akasgabe egiten dira.

c

Poisson-en banaketa harturik, $\lambda = 4.56$ izanik, aurreko probabilitate berdina eman behar dira:

k	$P(X = k)$	Emaitza
0	$\frac{e^{-4.56} \cdot 4.56^0}{0!}$	0.0105
1	$\frac{e^{-4.56} \cdot 4.56^1}{1!}$	0.0480
2	$\frac{e^{-4.56} \cdot 4.56^2}{2!}$	0.1095
3	$\frac{e^{-4.56} \cdot 4.56^3}{3!}$	0.1665
4	$\frac{e^{-4.56} \cdot 4.56^4}{4!}$	0.1898
5	$\frac{e^{-4.56} \cdot 4.56^5}{5!}$	0.1731
6	$\frac{e^{-4.56} \cdot 4.56^6}{6!}$	0.1315
7	$\frac{e^{-4.56} \cdot 4.56^7}{7!}$	0.0857
8	$\frac{e^{-4.56} \cdot 4.56^8}{8!}$	0.0488
9	$\frac{e^{-4.56} \cdot 4.56^9}{9!}$	0.0247
10	$\frac{e^{-4.56} \cdot 4.56^{10}}{10!}$	0.0113
11	$\frac{e^{-4.56} \cdot 4.56^{11}}{11!}$	0.0047
12	$\frac{e^{-4.56} \cdot 4.56^{12}}{12!}$	0.0018



Bi banaketak aski desberdinak dira; beraz, Poisson-en banaketa ezin da banaketa geometrikoaren hurbilketa gisa erabili. Nabarmena da, Poisson banaketa nahiko simetrikoa dela eta kanpia itxurakoa; banaketa geometrikoa, berriz, asimetrikoa da guztiz; halaber, banaketa geometrikoak mutur astunagoa du, probabilitate handiagorekin alegia.