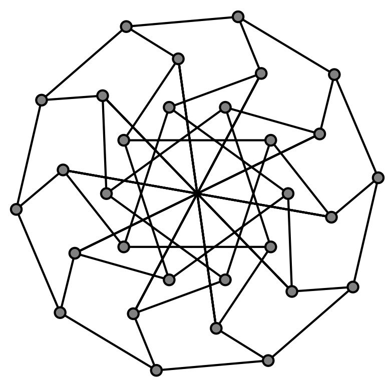
GRAFO-TEORIA



Egilea: Josemari Sarasola

Gizapedia

gizapedia.hirusta.io

Aurkibidea

1 Grafo-teoria zer den **3**

2 Grafoa: kontzeptua eta definizioa **4**

3 Jakingarri batzuk **5**

4 Bide eta zirkuitu eulertarrak **6**

4.1 Bide eta zirkuitu eulertarretarako irizpidea 6
4.2 Bide eta zirkuitu eulertarren bilaketa:
Fleury-ren algoritmoa 7

5 Ariketak: bide eta zirkuitu eulertarrak **8**

6 Bide-ikuskatzearen problema **10**

6.1 Ariketak: Bide-ikuskatzearen problema 12

7 Bide laburrena: Dijkstra-ren algoritmoa **13**

7.1 Dijkstra-ren algoritmoaren programa 18
7.2 Dijkstra-ren algoritmoa: ariketak 18

8 Bide eta zirkuitu hamiltondarrak **19**

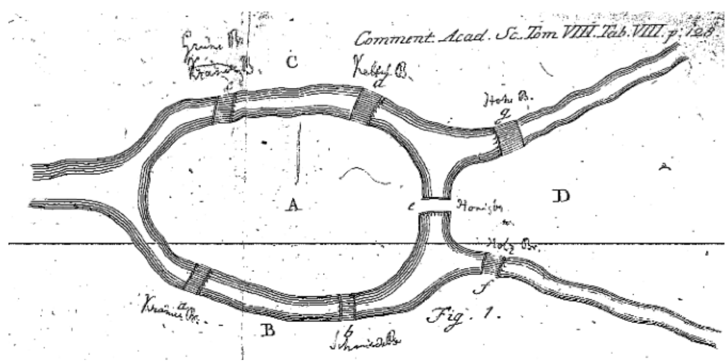
9 Saltzaile ibiltariaren problema **19**

9.1 Grafo osoak 19
9.2 Indar gordinaren algoritmoa 21
9.3 Ondoko gertuenaren algoritmoa 22
9.4 Ondoko gertuenaren algoritmo errepikatua 22
9.5 Lotura merkeenaren algoritmoa 23
9.6 Saltzaile ibiltariaren problema: laburpena 23

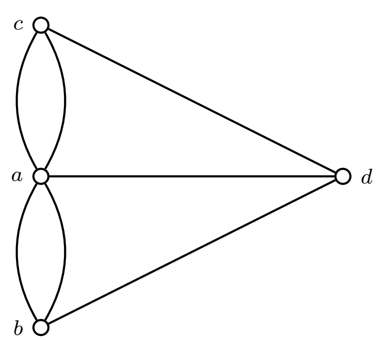
1 Grafo-teoria zer den

1735 urtearen inguruan Leonhard Euler (1707-1783) suitzar matematikaria Königsberg hiriko zazpi zubiak *behin bakarrik zeharkatuz* zeharkatuz paseoa egin ote zitekeen interesaturik agertu zen. Hasiera batean, harriturik agertu zen horrelako problema bat nolatan planteatu zioten, bera matematikaria izanda. Garaiko aljebrarekin zein geometriarekin ebazteko ezintasuna agertu zuen, ezta zenbaketa hutsez ere, harik eta 1741 urtean soluzioa azaldu zuen *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* artikuluan.

Hauxe da Königsberg hiriko zazpi zubietako mapa:



Euler ohartu zen mapa fisikoa gutxienekoa zela, eta kontuan hartzekoa eremuak eta horiek lotzen zituzten zubiak zirela. Horrela, problema grafo baten bitartez irudikatu daiteke, hots, erpinak eta horiek lotzen dituzten ertzen bitartez:

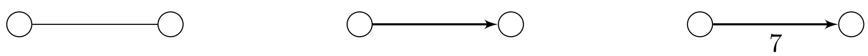


Arrazonamendu burutsu baten bitartez, zazpi zubiak behin zeharkatuz paseorik ezin zela eman ondorioztatu zuen. **Königsberg-eko zazpi zubiak** deitu den problemaren ebazpena, Grafo-teoriaren sorrera izan zen. Geroztik, grafo-teoria garatzen joan da, bereziki XX. mendean. Bereziki sareak, adiera zabalean, irudikatzeko erabiltzen den egitura da: errepideak, komunikazio-sareak, sare sozialak, molekulak, lan prozesuak, besteak beste. Grafo-teoriaz ebazten diren problemak hainbat dira; adibidez, saltzaile ibiltariaren probleman (*TSP*, *Travelling Salesman Problem*) puntuak lotzen dituen bide-sare laburrena bilatzen da, esleipen probleman, atazak eta horiek egin ditzaketen langileak esleitzen dira, egindako atazak gehienak izan daitezen; eta koloreztaketaren probleman, mapa bateko eskualdeak irudikatzeko kolore-kopuru minimoa bilatzen da.

2 Grafoa: kontzeptua eta definizioa

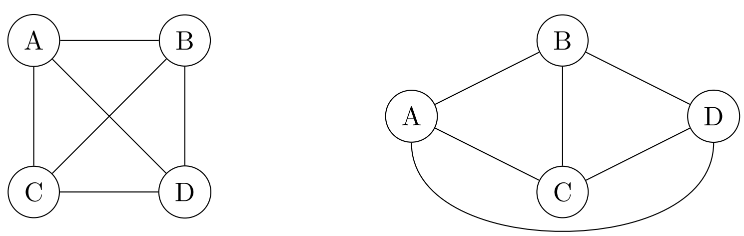
Grafoa erpin-multzo bat bat, horiek lotzen dituen ertzekin batera.

Bi erpin lotzen dituzten ertzek norabide jakina dute batzuetan, eta orduan gezi bidez irudikatzen dira. Geziak dituztenean, grafoak *norabidatuak* direla esaten da, eta ertzak dituztenean, *norabidatu* gabekoak. Grafoko ertzek zein geziek balioak har ditzakete, luzera, kostua edo beste aldagai adierazten dutenak; balio horiek azaltzen direnean grafoa *haztatua* dela esaten da. Ohartzekoa ez diola



Ezkerrean, norabidatu gabeko grafoa. Erdian, grafo norabidatua. Eskuinean, grafo haztatua.

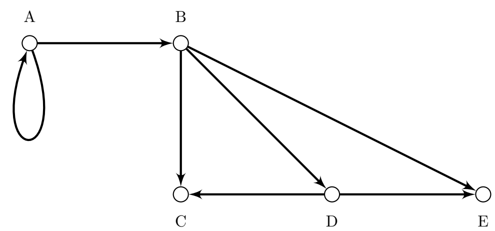
axola nolako itxura duen grafoak, baizik eta grafoko erpinak nola loturik dauden ertzen bitartez. Horrela, itxura ezberdineko bi grafo berdinak izan daitezke:



Bi grafoak berdinak dira, itxuraz ezberdinak izan arren.

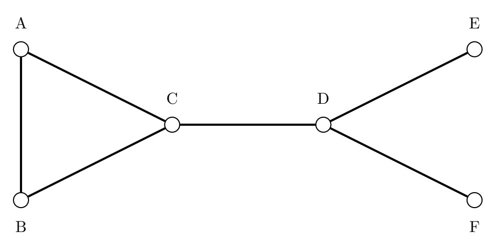
Horregatik, grafoa definitzeko egokiagoak izan daitezke eraso- edo intzidentzia-matrizeak. Adibidez, eraso-matrizea eta egoki dakiokeen grafoa irudikatzen dira ondoren:

	A	B	C	D	E
A	1	1	0	0	0
B	0	0	1	1	1
C	0	0	0	0	0
D	0	0	1	0	1
E	0	0	0	0	0



3 Jakingarri batzuk

- Grafo batean, **bidea** ertzen segida bat da.
- Grafo batean, **zirkuitua** erpin berean hasi eta bukatzen den bide bat da.
- **Begizta** erpin berean hasi eta bukatzen den ertza da.
- **Grafo lotua** edozein erpin batetik beste batera bidea duen grafoa da. Hau da, grafo lotua erpin guztiak lotzen dituen hura da.
- Ertz bat **zubia** dela esaten da, hori kenduz gero grafoa lotu gabea bihurtzen denean.
- **Erpin baten maila** erpin horretara heltzen diren ertzen kopurua da.
- Ertz guztiek bina maila ematen dituzte, bi erpin lotzen dituztelako. Beraz, erpin guztietako mailen batura bikoitia izan behar da, eta horretarako *maila bakoitiko erpinen kopurua bikoitia izan behar da*, bestela mailen batura bakoitia litzatekeelako, eta hori ez da posible.



ABDE bidea da. ABCA zirkuitua da. Grafo lotua da, baina CD ezabaturik lotu gabe geratzen denez, CD ertza zubia da. Mailak hauek dira: $m(A) = 2$, $m(B) = 2$, $m(C) = 3$, $m(D) = 3$, $m(E) = 1$, $m(F) = 1$. Beraz, maila bakoitiko erpinen kopurua da 4 da (C, D, E eta F).

4 Bide eta zirkuitu eulertarrak

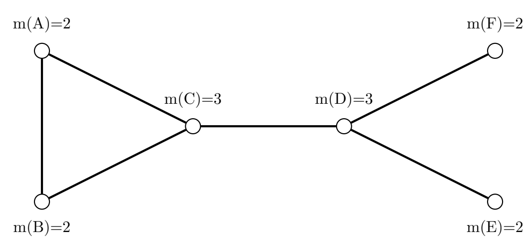
Bide eulertarra grafo bateko ertz guztiak behin bakarrik zeharkatzen dituen hura da. Bide eulertarra erpin berean hasi eta bukatzen bada, *zirkuitu eulertarra* dela esaten da.

Grafo batek zirkuitu eulertarra badu, **grafoa eulertar** edo **zeharkagarria** dela esaten da. Bide eulertarra badu, **grafoa erdi-eulertar** edo **erdi-zeharkagarria** dela esaten da.

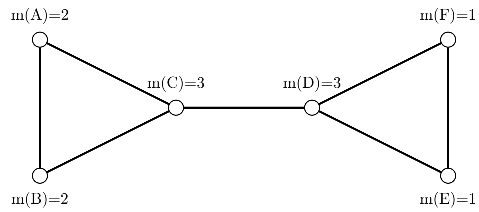
Königsber-eko zazpi zubien probleman zazpi zubietan zehar bide eulertarra aurkitzearen problema da. Bide eulertarraren problema puntuak eta horiek lotzen dituzten marrak dituen irudi bat arkatza paperetik altxatu gabe marraztearen problema ere bada.

4.1 Bide eta zirkuitu eulertarretarako irizpidea

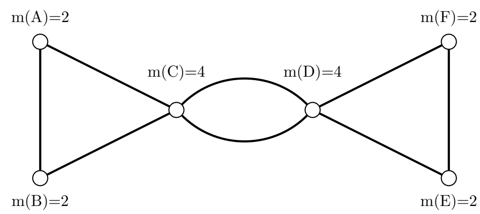
- Grafo lotu batean maila bakoitiko erpinen kopurua 0 bada, orduan badago zirkuitu eulertarrik (eta alderantziz.
- Grafo lotu batean maila bakoitiko erpinen kopurua 2 bada, orduan badago bide eulertarrik, baina ez zirkuitu eulertarrik (eta alderantziz). Bide eulertarra maila bakoitiko puntu bietako batean hasi eta bestean bukatuko da.
- Grafo lotu batean maila bakoitiko erpinen kopurua 4 edo handiagoa bada, orduan ez dago ez bide eulertarrik ez zirkuitu eulertarrik (eta alderantziz).



Maila bakoitiko erpinak 4 direnez (C, D, E eta F puntuetan), eta ez 2 edo 0, ez dago ez bide ez zirkuitu eulertarrik. Ezin dira ertz guztiak behin bakarrik zeharkatu (ezin da grafoa marraztu arkatza paperetik altxa gabe).



Maila bakoitiko erpinak 2 direnez (C eta D puntuetan) bide eulertarra badago: CABCDEFD. Ohartu maila bakoitiko C erpinean hasten dela, eta maila bakoitiko D erpinean bukatu.

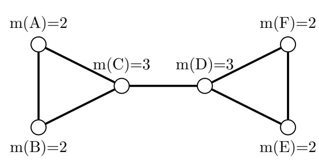


Maila bakoitiko erpinik ez dagoenez zirkuitu eulertarra badago: ABCDEFDCA, esaterako. Erpin bakoitza dagokion maila zati 2 aldiz zeharkatzen da. Zirkuitua denez, abiapuntua edozein erpinetan jar daiteke: guk hemen A erpinean jarri dugu.

4.2 Bide eta zirkuitu eulertarren bilaketa: Fleury-ren algoritmoa

Bide eulertarra bilatzeko, maila bakoitiko erpin batetik abiatu behar dela hartu behar da kontuan. Zirkuitu eulertarra bilatzeko, edozein erpinetik abia daiteke.

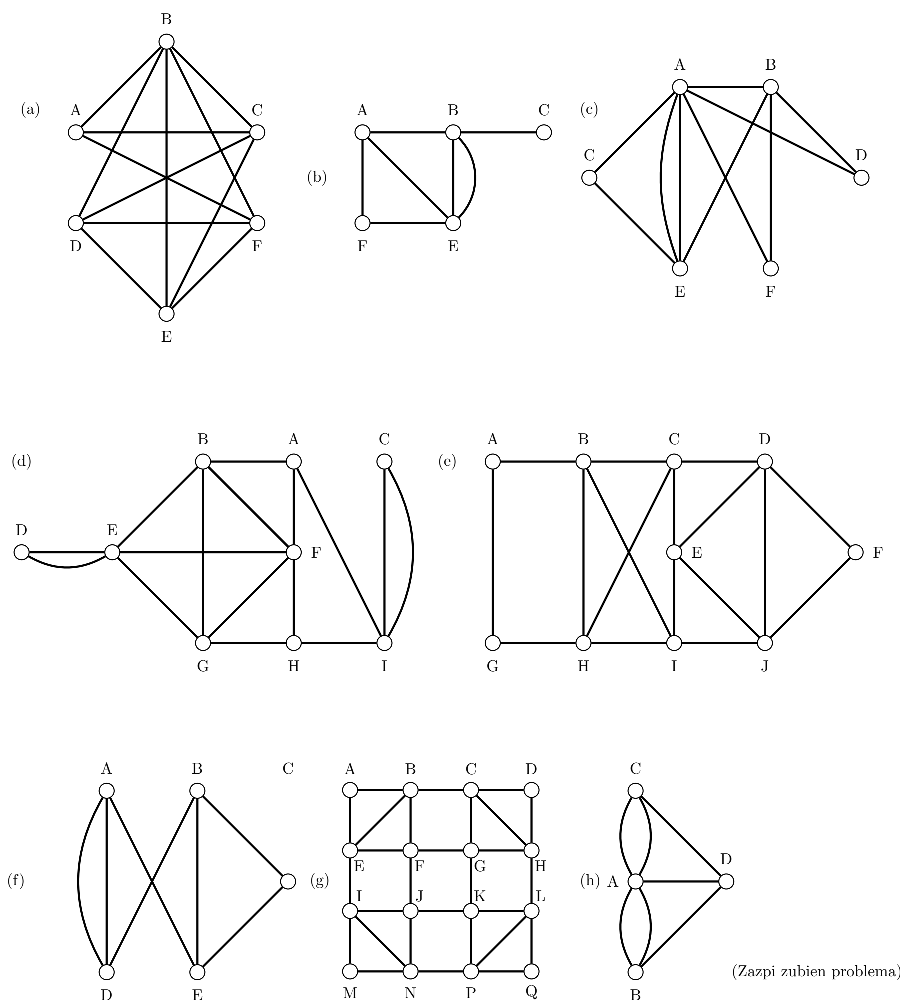
Fleury-ren algoritmoan, ertzak zeharkatzen eta grafotik ezabatzen goaz, baina geratzen den grafoan zubiak ez diren ertzak zeharkatuz, horretarako aukera dagoen bitartean (zientzia militarreko esamoldea hartuz: ”Ez erre zubiak, beste aukera guztiak agortu arte!”).



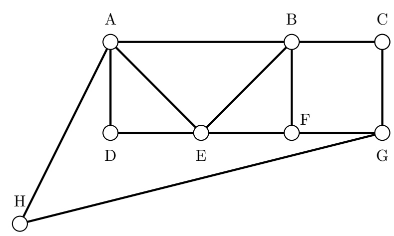
Bide eulertarra dagoela badakigu. Ctik nahiz Dtik has gaitezke. Ctik abiatuko gara: A, B zein Dra joan gaitezke, baina aukeran CD ertza ez dugu zeharkatuko, ez dugu ezabatuko, hura kenduz gero, grafoa lotu gabe geratuko litzatekeelako. Ara joango gara, eta CA ezabatu beraz. AB zubia da, hori kenduta, A erpina lotu gabe geratzen delako, baina orduan ez daukagu aukerarik eta aurrera jarraitu behar dugu derrigor (zubi hori erre egin behar dugu). Hortik aurrera, BC eta CD zubiak erretzen ditugu, aukerarik ez dagoelako. Eta E edo Fra joan gaitezke hurrena. Hortik aurrera garbi dago nola bukatzen den ibilbidea, D erpinean.

5 Ariketak: bide eta zirkuitu eulertarrak

1. Deduzitu ezazu honako grafoak eulertarrak edo erdi-eulertarrak diren, eta baiezkoan bilatu itzazu zirkuitu eta bide eulertarrak. Ezezkoan, gaineratu ertz gutxienak bide eulertarra izan arte.



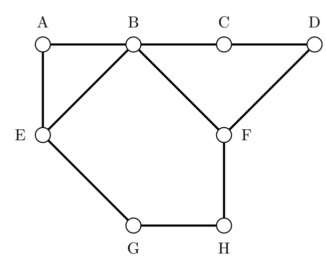
2. Parke natural batean ibilbide hauek proposatzen dira:



   (a) Egin al daitezke ibilbide guztiak errepikapenik gabe eta abiapuntura itzuliz?

   (b) Non jarri behar da horretarako bisitarientzat harrera-etxea?

3. Polizia batek errepide sare hau patruilatu behar du gauero:

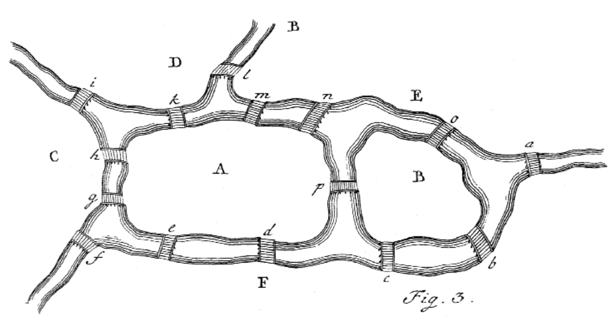


   (a) Egin al dezake patruila errepiderik errepikatu gabe?

   (b) Ahal izatekotan non hasi eta bukatu behar du bere lana?

   (c) Errepikapenik gabeko ibilbidea egin daitekeen patruila laburrena al da?

4. Honako zubi hauetan zehar paseatu al daiteke zubirik errepikatu gabe?



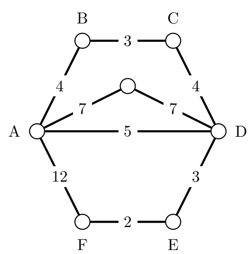
6 Bide-ikuskatzearen problema

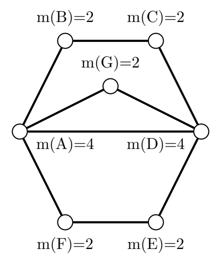
Bide-ikuskatzearen probleman grafo batean ertz guztiak zeharkatzen dituen zirkuitu laburrena blatzen da. 1960 urtean planteatu eta ebatzi zuen lehen aldiz Meigu Guan txinatar matematikariak, txinatar postariaren problemaren izenarekin.

Abiapuntua grafo haztatua da, ertz guztietan distantzia edo kostua zehaztuta dituena. Helburua ertz guztiak zeharkatzea, distantzia edo kostu txikienarekin.

Kasurik sinpleenean grafoa eulertarra da. Orduan ertz guztiak zeharkatzen dituen zirkuitu laburrena zirkuitu eulertarra izango da, horrek ertz guztiak behin bakarrik zeharkatzen dituelako.

Adibidea (zirkuitu eulertarra badago): Zein da A-tik D-rako bide laburrena?

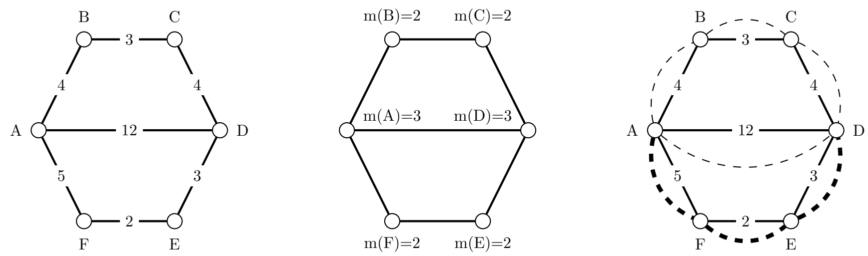




Mailak kalkulatuta, badakigu zirkuitu eulertarra dagoela: ABCDGADEFA, 47ko distantzia duena. Distantzia laburreneko zirkuitua da, ertz guztiak behin bakarrik zeharkatzen direnez. Zirkuitua beste edozein erpinetan has daiteke, noski.

Grafoa erdi-eulertarra bada, hots, maila bakoitiko erpinak 2 direnean, bide eulertarra badago badago, baina ez zirkuiturik. Beraz, helmugatik abiapuntura itzulerako ibilbidea egin behar da. Horretarako bi erpin horiek (abiapuntua eta helmuga) lotzen dituen bide laburrena bilatu behar da, eta bide eulertarrari (ertz guztiak zeharkatuz maila bakoitiko erpin batean hasi eta bestean bukatzen den bideari) bide laburren hori gehitu, ertz guztiak zeharkatzen dituen zirkuitu laburrena izate aldera.

Adibidea (bide eulertarra badago): Zein da A-tik D-rako bide laburrena?



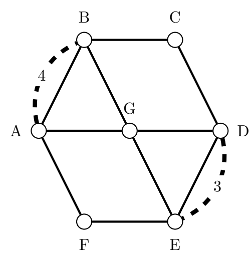
Mailak kalkulatuta, badakigu bide eulertarra badagoela, A-tik abiatu eta D-n bukatzen dena (edo alderantziz): ABCDAFED, 33ko distantzia duena. Distantzia laburreneko zirkuitua bilatu behar denez, hots, puntu berean hasi eta bukatu behar denez, A-tik D-rako distantzia laburrena gehitu behar zaio horri. Hiru aukera daude: ABCD (4+3+4=11), AD (12) eta AFED (5+2+3=10), edo horien alderantzizkoak. Azkena denez laburrena, distantzia laburreneko zirkuitu osoa ABCDAFED (33) + EFA (10) da, 43ko distantzia duena.

Maila bakoitiko erpinak 4 edo gehiago direnean, erpin horien arteko lotura posible guztiak zerrendatu eta horietako bakoitzean bikoteak lotzeko distantzia laburrenak kalkulatu behar dira. Distantzia laburren horiek gehituta, distantzia laburren txikiena ematen duen lotura hartu beharko da. Distantzia laburreneko ertzak lotuz, distantzia laburreneko zirkuitua osatuko da.

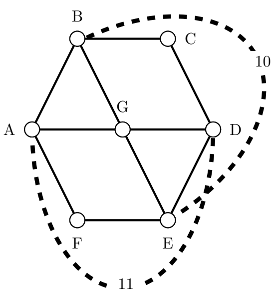
Maila bakoitiko erpinak 4 direnean, erpinen arteko enparejamenduak 3 dira; 6 erpin direnean, 15 enparejamendu; eta oro har, n erpinetarako $(n-1)\times(n-3)\times\cdots\times 1$ enparejamendu.

Adibidea (ez dago ez bide eulertarrik ez zirkuitu eulertarrik): Zein da A-tik D-rako bide laburrena?

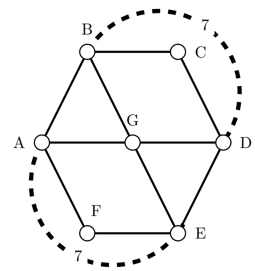
Mailak kalkulatuta (eskuinean) maila bakoitiko erpinak 4 dira: A, B, D eta E. Zirkuitu eta bide eulertarrik ez dagoenez, erpin horien arteko lotura posible guztiak egiten ditugu: AB-DE, AD-BE eta AE-BD. Horietako bakoitzean, bikoteak lotzeko distantzia laburrenak bilatu behar dira.



AB+DE: 4+3=7



AD+BE: 11+10=21



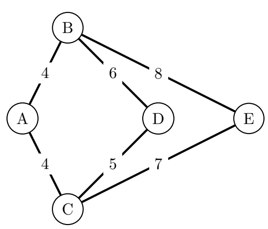
AE+BD: 7+7=14

Maila bakoitiko erpinak lotu egin behar dira, zirkuitua egin ahal izateko. Baina distantzia laburrena bilatu behar denez, erpin horien arteko 3 lotura posibleak aztertzen dira. Horietako bakoitzean, distantzia laburrenak lotura bakoitzaren azpian azaltzen da. Eta lotura guztietan, distantzia laburrena duena hartuko da berriz ere: AB-DE, 7ko distantzia gehitzen duelako, besteak (10,11) baino laburragoa. Distantzia laburreneko zirkuitua osatzeko, hasierako grafoari lotura hori (AB eta DE ertzak, alegia) gaineratuko zaio, zirkuitu eulertarra osatzeko, orain erpin guztiak maila bikoitikoak direnez. Kasu honetan, beraz, distantzia laburreneko zirkuitua ABCDEFAGEDGBA izango da. Ohartu edozein erpinetan jar daitekeela abiapuntua, zirkuitua denez.

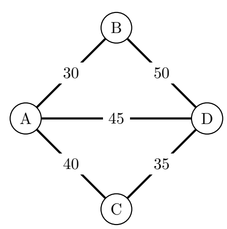
6.1 Ariketak: Bide-ikuskatzearen problema

Postari txinatarraren zirkuitu optimoak eta dagozkien distantziak aurki itzazu grafo hauetan:

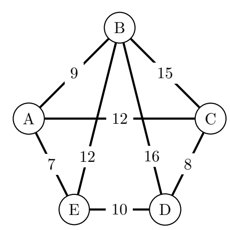
(a)



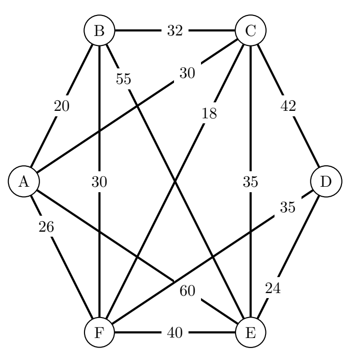
(b)



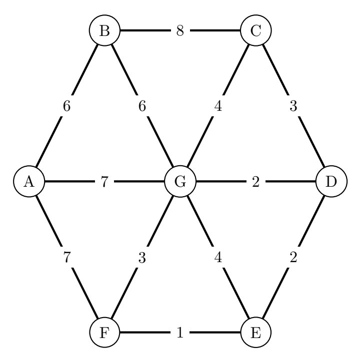
(c)



(d)



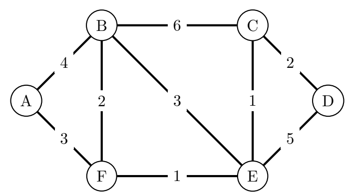
(e)



7 Bide laburrena: Dijkstra-ren algoritmoa

Aurreko ataletan ertz guztiak zeharkatuz bide laburrena aurkitzeko metodoak ikasi ditugu. Dijkstra-ren algoritmoak berriz, (algoritmo asmatzailea izan zen Edsger Dijkstra omenez, 1930-2002) bi puntuen arteko bide laburrena edo kostu txikienekoa ematen du, ibilbide posible guztiak aztertu gabe, grafo norabidatu nahiz norabidatu gabekoetan. Algoritmoa ikasteko, egokiena pare bat adibide bat garatzea da:

Adibidea (norabidatu gabeko grafoa): A eta D puntuen arteko ibilbide laburrena aurkitu behar da:



Algoritmoa taula batean garatzen da, errenkadaz errenkada. **Lehen errenkadan** A puntuan distantzia 0 dela ezartzen da, eta hortik beste guztietarako infinitu dela pentsatuko da. 0 distantzia txikiena denez, markatu egiten dugu, eta A puntuan lortu denez, A etiketa gehitzen diogu.

Bigarren errenkadan, A puntutik abiatu eta ondoko puntuetarako bidea egiten dugu, eta haietarako distantzia markatu, infinitu ordez, eta besteak berdin utziz; markatu gabeko distantzietan txikiena hartu eta markatu egiten dugu, kasu honetan Frako ertzak ematen digu, eta halaxe adierazten dugu.

Nora → Nondik ↓	A	B	C	D	E	F
-	0:A	∞	∞	∞	∞	∞
A	0:A	4	∞	∞	∞	3:A

Hirugarren errenkada irekitzeko, aurrekoan bide laburrena Frako suertatu denez, hortik jarraitzen dugu. B eta E puntuetarako bidea dago. Bra joanez gero, aurreko errenkadan markatutako 3 distantziari 2 gehitu behar zaio, 5eko distantzia totala sortuz, baina B zutabean 4 jarrita dugunez, zeina distantzia txikiagoa den, ez dugu jartzen, eta jarraitzen dugu 4ko distantzia horrekin, Atik joanda sortzen zena. Era joanez gero, 3+1=4ko distantzia berria dugu, zeina infinitu baino txikiagoa den, eta jarri egiten dugu beraz. Besteak berdin utzita, txikiena markatzen dugu, nondik joanda sortu den adieraztearekin batera: 4 balioan berdinketa dagoenez, edozein hartzen dugu, esaterako Bra doana, eta zutabean gora 4ko balio hori Atik etorrita sortu zela ikusten dugu, bigarren errenkadan eta halaxe adierazten dugu:

Nora → Nondik ↓	A	B	C	D	E	F
-	0:A	∞	∞	∞	∞	∞
A	0:A	4	∞	∞	∞	3:A
F	0:A	4:A	∞	∞	4	3:A

Bide laburrena orain Bra heldu denez, hortik abiatzen da **laugarren errenkada**. C, E eta Fra joan gaitezke, baina Ftik pasa garenez jada, aukera hori baztertzen dugu (izan ere, ertz berdina bi aldiz ez dugu egingo). Aurreko errenkadan markatu berri den distantziari distantzia berriak gehitu Cra eta Era joateko, eta txikiena markatzen dugu aurrekoetan bezala. Cra, aurreko errenkadan markatutakoari gehi 6 egiten diogu eta infinitu baino txikiagoa denez, hots, hobekuntza dakarrenez, jarri egiten dugu. Era, aurreko errendakakoari, 4ri, gehi 3 egiten diot, eta 7 emaitza 4 baino handiagoa denez, aurrekoarekin geratzen naiz, 4rekin alegia. Markatu gabekoetan txikiena 4 da eta markatu egiten dugu, Ftik etorrita sortu zela adieraztearekin batera:

Nora → Nondik ↓	A	B	C	D	E	F
-	0:A	∞	∞	∞	∞	∞
A	0:A	4	∞	∞	∞	3:A
F	0:A	4:A	∞	∞	4	3:A
B	0:A	4:A	10	∞	4:F	3:A

Bostgarren errenkada Etik abiatzen da, hartara heldu denez bide laburren bat aurreko errenkadan. Etik Cra nahiz Dra joan gaitezke. Cra joanda, 4ko distantzia (3+1) zeharkatzen dugu aurreko markatzetik abiatuta, eta Dra joanda 3+5=8. Cra joanda, hobetu egiten dugu, Dra joanda ez, eta beraz azken honetan aurreko errenkadako balioarekin jarraitzen dugu:

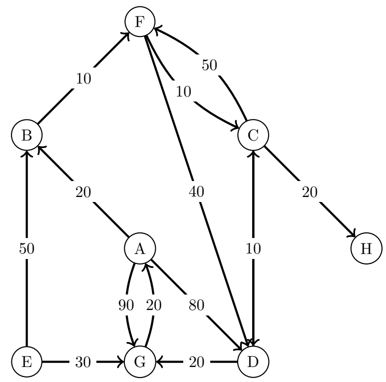
Nora → Nondik ↓	A	B	C	D	E	F
-	0:A	∞	∞	∞	∞	∞
A	0:A	4	∞	∞	∞	3:A
F	0:A	4:A	∞	∞	4	3:A
B	0:A	4:A	10	∞	4:F	3:A
E	0:A	4:A	5:E	9	4:F	3:A

Seigarren errenkada Ctik abiatzen da, hartara heldu denez bide laburren bat aurreko errenkadan. Ctik Dra bakarrik joan gaitezke, Era joatea baztertuz hortik igaro daitekeenez jada. Dra joanda, 7ko distantzia (5+2) zeharkatzen dugu aurreko markatzetik abiatuta, aurrekoa baino txikiagoa eta beraz distantzia berria idazten dugu. Errenkada osoan markatu gabekoetan txikiena da (azkenekoa) denez, eta beraz markatu egiten dugu:

Nora → Nondik ↓	A	B	C	D	E	F
-	0:A	∞	∞	∞	∞	∞
A	0:A	4	∞	∞	∞	3:A
F	0:A	4:A	∞	∞	4	3:A
B	0:A	4:A	10	∞	4:F	3:A
E	0:A	4:A	5:E	9	4:F	3:A
C	0:A	4:A	5:E	7:C	4:F	3:A

Horrela, Dra, helmugara, heldu gara, 7ko distantzia laburren batez. 7ko distantzia hori ematen duen ibilbidea zehazteko, zutabez zutabe joan behar dugu D zutabetik abiatuta. Zutabe horretan C markatuta dago, C zutabean E, E zutabean F, eta F zutabean A. Ibilbide laburrena, beraz, AFECD da.

Adibidea (grafo norabidatua): A eta G puntuen arteko ibilbide laburrena zein da? Eta Atik Era bitartekoa?



Grafoa norabidatua denean, aski da puntu batetik bestera joateko aukera posibleak ertzen norabideei erreparatuz zehaztea. Bestela, algoritmoa grafo norabidatu gabekoetan bezala garatzen da. Hemen garatzen da problemari dagokion taula:

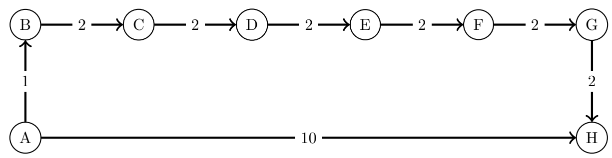
Nora → Nondik ↓	A	B	C	D	E	F	G	H
-	0:A	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
A	0:A	20:A	∞	80	∞	∞	90	∞
B	0:A	20:A	∞	80	∞	30:B	90	∞
F	0:A	20:A	40:F	70	∞	30:B	90	∞
C	0:A	20:A	40:F	50:C	∞	30:B	90	60
D	0:A	20:A	40:F	50:C	∞	30:B	70	60:C
H	0:A	20:A	40:F	50:C	∞	30:B	70:D	60:C
G	0:A	20:A	40:F	50:C	∞	30:B	70:D	60:C

G errenkadan aurrera jarraitu ezinik gelditzen gara. G-tik inorako ibilbiderik ez dagoenez, algoritmoa gelditu egiten da. Beraz, G-ra iritsita harako distantzia infinitua da oraindik ere; bestela esanda, ez dago ibilbide laburrenik era iristeko, hara ezin baita joan.

G puntura joateko, berriz, G zutabean begiratuta, A-tik G-rako distantzia laburrena 70 dela ikusten dugu, eta zutabez zubate jauzi eginez ibilbide honetatik gertatzen da: GDCFBA.

Adibidea (Dijkstra-ren algoritmoaren funtsa intuizioz ulertzeko):

Dijkstra-ren algoritmoaren pausoak ulertzeko, har dezagun adibide hau:



Grafoak A-tik H-ra joateko bi aukera irudikatzen ditu. Ertz bakoitzeko balioak ertzeko helmugan gaua ostatu batean emateko kostua eurotan adierazten du. Ez daukagu presarik eta H-ra ahalik eta diru gutxien xahututa nahi dugu heldu. Grafoa laburra denez, garbi ikusten dugu kostu txikienekoa A-tik H-ra zuzenean joatea dela. Baina irudika dezagun grafoa oso handia dela eta ez garela gai aukera guztiak aztertzeko. Dijkstra-ren algoritmoa A-tik abiatzen da, eta hor lehen bi aukerak ikusten ditugu: 1€ , B-ra bagoaz, eta 10€ ordaintzea, H-ra bagoaz. Kostu txikienekoa hartzen dugu, baina 10 euroko aukera gogoan edukiz. Goiko bidetik jarraituko genuke, 1+2+2+... kalkulatuz, 1:A, 3:B, 5:C, 7:D, 9:E markatuz (E-tik nator eta 9€ xahutu ditut ja). Bitartean A-tik H-rako zuzeneko bidean 10ekoa daukat denbora guztian gogoan. Hurrengoan Ftik Gra joango nintzateke, baina orduan kostua 11 litzateke, errenkada horretan H-rako balioa 10 denez, hura markatzen dut orain kostu txikieneko, eta aurreko guztiak baztertu.

Nora → Nondik ↓	A	B	C	D	E	F	G	H
-	0:A	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
A	0:A	1:A	∞	∞	∞	∞	∞	10
B	0:A	1:A	3:B	∞	∞	∞	∞	10
C	0:A	1:A	3:B	5:C	∞	∞	∞	10
D	0:A	1:A	3:B	5:C	7:D	∞	∞	10
E	0:A	1:A	3:B	5:C	7:D	9:D	∞	10
F	0:A	1:A	3:B	5:C	7:D	9:D	∞	10
G	0:A	1:A	3:B	5:C	7:D	9:D	11	10:A

7.1 Dijkstra-ren algoritmoaren programa

Beti G grafo bakun edo lotua,

- erpinak $a, v_0, v_1, \ldots, v_n, z$ dituena;
- erpinen arteko distantzia edo kostuak $w(v_i, v_j) > 0$ dituena, $w(v_i, v_j) = \infty$ baldin eta $\{v_i, v_j\}$ ertza ez bada.

a eta z arteko ibilbide laburrena edo merkeena honela kalkulatzen da:

for $i = 1$ **to** n

- $L(v_i) = \infty$
- $L(a) = 0$
- $S = \emptyset$

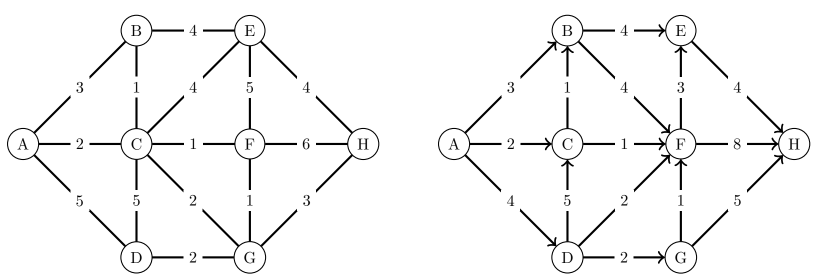
while $z \notin S$
begin

- u, S multzokoa ez den eta $L(u)$ minimoa duen erpina
- $S = S \cup \{u\}$
- $\forall v \notin S$
    - $L(u) + w(u, v) < L(v)$ bada, orduan $L(v) = L(u) + w(u, v)$

end
return $L(z)$

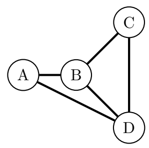
7.2 Dijkstra-ren algoritmoa: ariketak

1. Aurkitu A-tik H-rako bide laburrena grafo haztatu hauetan:

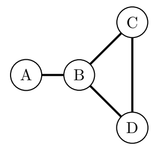


8 Bide eta zirkuitu hamiltondarrak

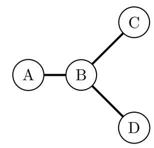
Grafo batean *puntu guztiak behin bakarrik* zeharkatzen dituen zirkuitua, hots abiapuntura itzuliz, zirkuitu hamiltondarra dagoela esaten da. Puntu guztiak behin bakarrik zeharkatu ahal badira, baina abiapuntura itzuli gabe, bide hamiltondarra dela esaten da.



Zirkuitu hamiltondarra badago: ABCDA.



Bide hamiltondarra badago (ABCD, esaterako) baina ez zirkuiturik.



Ez dago ez bide ez zirkuitu hamiltondarrik.

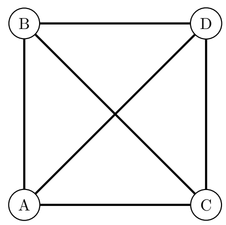
Ez dago bide eta zirkuitu hamiltondarretarako erregela orokorrik, baldintza beharrezkoak eta askiak ematen dituztenak. Dirac-en erregelak (1952) grafo bakunetan (bi erpin lotzen dituen ertz bakarra dutenetan, alegia) zirkuitu hamiltondarra dago, n erpin-kopurua izanda, erpin guztietako maila $n/2$ edo handiagoa denean (hau da, baldintza askia zirkuitu hamiltondarretarako), baina baliteke zirkuitu hamiltondarra izatea hori bete gabe (ez da baldintza beharrezkoa).

9 Saltzaile ibiltariaren problema

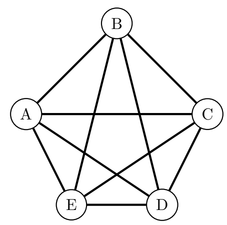
Dena den, praktikan bide eta zirkuitu hamiltondarren existentzia baino, zirkuitu hamiltondar asko dituzten grafoetan distantzia edo kostu txikienekoa aurkitzea da problema. Problema horri saltzaile ibiltariaren problema (ingelesez, *Traveling Salesman Problem*, labur *TSP*) deritzo.

9.1 Grafo osoak

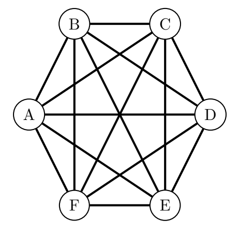
Zeintzuk dira zirkuitu hamiltondar asko dituzten grafo horiek? Interesatzen zaizkigunak, praktikan horiek direlako agertzen direnak, *grafo osoak* dira, hots, erpin guztiak beste erpin guztiekin loturik dauden horiek. n erpin dituen grafo osoari K_n izendatuko dugu.



K_4: 4 erpineko grafo osoa.



K_5: 5 erpineko grafo osoa.



K_6: 6 erpineko grafo osoa.

K_4 grafoan, adibidez, 6 zirkuitu hamiltondar daude:

A,B,C,A	A,C,B,A
B,C,A,B	B,A,C,B
C,A,B,C	C,B,A,C

Zirkuitu horietako bakoitzak ibilbide zenbait ditu. Adibidez ABCA zirkuitua ABCA, BCAB zein CABC eratara zeharka daiteke, abiapuntua aldatuz. Abiapuntuari eta helmugari erreferentzia-erpina deituko diogu.

K_n grafo osoan erpin guztien permutazio edo ordenatzeko moduetako bakoitza da ibilbide posible bat, grafo osoan erpin guztiak loturik daudenez. Horrela, lehen erpinerako n aukera ditugu, bigarrenerako $n-1$ (beste guztiak ken lehenengoa), hirugarrenerako $n-2$, ... Guztira, orduan, $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots = n!$ ibilbide posible izango ditugu, baina horiek guztiak n-na aldiz errepikatzen dira, erreferentzia-erpina bakarrik aldatzen dutenez. Beraz, zirkuitu hamiltondar ezberdinen kopurua, erreferentzia-erpina kontuan hartu gabe, $n!/n = (n-1)!$ izango da. Beste alde batetik, zirkuitu hamiltondar horietan bi erpinen arteko distantzia bi norabidetan berdina dela suposatzen badugu, distantzia ezberdineko zirkuitu hamiltondarren kopurua erdira murrizten da (ABCA eta alderantzizko ACBA distantzia berekoak liratekeelako, esaterako); orduan distantzia ezberdineko zirkuitu hamiltondarren kopurua $(n-1)!/2$ litzateke. Aurrerantzean, ordea, orokorrean hori horrela ez dela suposatuko dugu orokorrean.

Ikus dezagun taula hau:

K_n	Ertzak: $n(n-1)/2$	Hamiltondar zirkuituak: $(n-1)!$
K_3	3	2
K_4	6	6
K_5	10	24
K_6	15	120
...	...	...
K_{16}	120	1307674368000

Ikusten denez, *leherketa konbinatorioa* gertatzen da: erpin gutxiko grafo osoetarako ere zirkuitu kopurua, distantzia laburrenekoa emate aldera, oso handia da; adibidez, 16 erpinetarako biliotik gorako zirkuitu hamiltondar daude.

Bidenabar, eta grafo osoekin bukatzeko, jakin nahi dugu grafo osoetan bide edo zirkuitu eulertarrik ba ote den: grafo osoetan erpin guztiak loturik daudenez, n erpinetako bakoitza $n-1$ erpinekin dago loturi, eta beraz horixe bera da erpin guztien maila. Zirkuitu eulertarra izateko maila guztiak bikoitiak izan behar direnez, $n-1$ bikoitia izan behar da, hots n bakoitia. Beraz, K_3, K_5, K_7, ... grafo osoak eulertarrak dira. Maila guztiak bakoitiak edo bikoitiak direnez, ez dago bide eulertarra duen grafo osorik.

9.2 Indar gordinaren algoritmoa

Indar gordinaren algoritmoak (ingelesez, *Brute Force Algorithm*) zirkuitu eulertar guztietako distantzia osoak kalkulatzen ditu, eta horietan laburrena hartzen du.

Ikus dezagun adibide batez. Horretarako erpinen arteko distantziak azaltzen dituen matrizea hartzen dugu abiapuntutzat:

Erpinak (nondik: $\downarrow$, nora:$\rightarrow$)	A	B	C	D
A	-	4	5	4
B	11	-	7	3
C	7	9	-	1
D	6	2	5	-

Zirkuitu hamiltondarrak 24 direla badakigu. Egin dezagun zerrenda eta horietako bakoitzeko eman dezagun distantzia totala:

Zirkuitua	Distantzia totala
ABCDA	4+7+1+6=18
ABDCA	4+3+5+7=19
ACBDA	5+9+3+6=23
ACDBA	5+1+2+11=19
ADBCA	4+2+7+7=20
ADCBA	4+5+9+11=29

Horrela, zirkuitu hamiltondar laburrena ACDBA da, 19ko distantziaz.

Indar gordinaren algoritmoak ematen duen *soluzioa optimoa* da, bilaketa exhaustiboa egin dugunez ziurtasun osoz dakigulako aurkitu dugun zirkuitu laburrena guztietan laburrena dela. Baina, *ez da soluzio efiziente* edo eraginkorra, zirkuitu guzti guztiak aztertzea eskura ditugun baliabideetatik at, bereziki denboratik at, izaten delako, hain handiak ez diren grafoetarako ere. Hori ikusteko, osa dezagun taula bat grafo oso batzuetarako zirkuitu eulertarren kopurua, eta segundu batean milioi bat zirkuitu hamiltondarren distantziak kalkulatzen direla suposaturik, problema ebazteko zenbat denbora beharko genukeen ematen dituena:

K_n	Hamiltondar zirkuituak	Denbora
K_6	5!=120	berehalakoa
K_{10}	9!=362880	0.33 segundu
K_{11}	10!=3628800	3.6 segundu
K_{12}	11!=3.99168e7	40 segundu
K_{13}	12!=4,790016e8	8 minutu inguru
K_{14}	13!=6,2270208e9	2 ordu inguru
K_{15}	14!=8,71782912e10	egun bat pasatxo
K_{16}	15!= 1307674368000	15 egun inguru
...	...	...
K_{20}	19!=1,21645100408832e17	milioi bat urtetik gora

9.3 Ondoko gertuenaren algoritmoa

Ondoko gertuenaren algoritmoa (ingelesez, *Nearest Neighbor Algorithm*, NNA) erpin jakin batetik abiatu eta erpin gertuenerako bidea hartzen du, hortik berriz ere bisitatu gabeko erpin gertuenera abiatzeko, eta horrela erpin guztiak bisitatu arte. Aurreko ataleko adibidean, Atik abiatzen bagara, Dra joan beharko genuke algoritmo horren arabera (4ko distantziara), Dtik Bra (2ko distantziara), Btik Cra (7ko distantziara) eta azkenik Ara itzuli (7ko distantziara). Horrela, soluziotzat ADBCA hartuko genuke, guztira 4+2+7+7=20 distantziara.

Ikusten denez, algoritmoak ez du soluzio optimoa ematen, baina hurbildu egiten da optimora, zirkuitu hamiltondar guztietako distantziak frogatu beharrik gabe. Beraz, optimoa ez den arren, efizientea da.

9.4 Ondoko gertuenaren algoritmo errepikatua

Aurreko algoritmoa hobetezen saiatzen da ondoko gertuenaren algoritmo errepikatua (ingelesez, *Repetitive Nearest Neighbor Algorithm*, RNNA): abiapuntu jakina hartu beharrean, abiapuntu guztietarako errepikatzen da algoritmoa. Gure kasuan Atik abiatuta eginda daukagu: ADBCA zirkuitua aukeratzen da, 20ko distantziara. Orain, algoritmoa B, C eta Dtik abiatuta garatzea falta zaigu.

Btik abiatuta, gertuena D da 3ko distantziara, handik Cra 5eko distantziara eta azkenik Ara (7ko distantziara), bisitatu gabe geratzen den erpin bakarra denez, eta Bra itzuli (8ko distantziara): guztira 3+5+7+4=19ko distantzia osatzen da BDCAB ibilbidean.

Ctik abiatuta, D da ondoko gertuena 1eko distantzia batera. Handik B, A eta C erpinetara pasatzen gara, 2, 11 eta 5eko distantzia batera. Guztira, 1+2+11+5=19ko distantzia batez egiten da CDBAC zirkuitua.

Dtik abiatuta, zirkuitu laburrena, ondoko gertuenera joaz betiere, DBCAD da, 20ko distantzia batera.

Horrela, BDCAB eta CDBAC lirateke aukeratzen diren soluzioak; erreferentzia-erpina A harturik, berriz, ABDCA eta ACDBA, biak 19ko distantzia batez. Indar gordinaren algoritmoak emadnako soluzioarekin alderaturik, ez da soluzio optimoa.

9.5 Lotura merkeenaren algoritmoa

Lotura merkeenaren algoritmoan (ingelesez, *Cheapest Link Algorithm*, CLA) taula osoko distantzia txikieneko ertzak zeharkatzen dira aldi bakoitzean erpinak lotzeko zirkuitu hamiltondarra egin arte, prozesuan bi ertzekin loturiko erpinak itxiz eta zirkuitu partziala sorrarazten duten ertzak baztertuz. Norabideak distantziari edo kostuari eragiten dionean ere, kontuan hartu beharko da.

Gure adibidean, taula osoko distantzia txikiena C eta D artekoa, 1eko distantzia batera. Hurrengo txikiena D eta B artekoa da, 2ko distantzia batera. Orain arte, beraz, CDB bidea dugu egina, D bi ertzekin loturik dagoenez, hortik ezingo gara berriz igaro, zirkuitu hamiltondarrean behin bakarrik pasatzen garelako erpin guztietatik. Hurrengo txikiena BD ertza baina dagoeneko egina daukagu. Hurrengo txikienak AB eta AD dira, AD ezin dugu hartu, D itxita dagoelako jada; AB ertza norabide horretan ere ezin da zeharkatu, Bra iritsita gaudenez, izatekotan BA egin beharko genukeelako; beraz, hurrengo txikiena hartu behar: AC eta DC aukeran, 5eko distantzia batera: D itxita dago, eta beraz AC hartzen da. Horrela, bidea ACDB geratzen da eta abiapuntura itzuliz ACDBA hartzen da soluziotzat 19ko distantzia batera. Ikusten denez, ez da soluzio optimoa.

9.6 Saltzaile ibiltariaren problema: laburpena

Soluzio optimoa baina ez efizientea ematen duen algoritmoa indar gordinarena da. Ikasi ditugun beste hiru metodoek: ondoko gertuena, errepikatuzko ondoko gertuena eta lotura merkeena ez dira orokorrean optimoak (baina izan daitezke problema konkretuetan), baina efizienteak dira. Egun, ez da asmatu saltzaile ibiltariaren problemarako algoritmo optimo eta efizienterik.

Ohartu behar da problemaren baldintzen lasaierak soluzio hobeagoetara eraman dezakeela. Aurreko adibidea harturik, erpin guztiak bisitatzeko, erpinak behin baino gehiagotan bisitatu badaitezke, ACDBDA ibilbideak, D erpina bi aldiz bisitatuz, 13ko distantziako soluzioa ematen du.